第５章　荷電質点の路

荷電質点という言葉は、一般的ではないかもしれないが、荷電粒子と言ってしまうと、具体的な電子等を想像して、量子論的な事柄が頭に浮かんで来たりする。本書では量子論的なことは扱わないので、量子論的な事柄を無視できるくらいの大きさを持った、帯電した物体を抽象化し、特にこう呼ぶことにする。今後、荷電質点 (m_0, q) というのは、質量 m_0 電荷 q を伴った質点という意味とする。

§５．１　定性的な考察

考察（１）

古典物理学的な考え方に戻って、次のような考察を行ってみよう。今、電磁場と重力場が同時に存在している３次元空間を想定し、電荷 q 質量 m_0 の物体 P が、路 $x^i(t)\quad(i=1,2,3)$ を描いて、自由落下しているとする。

この物体 P が、この場から受ける電磁力 $f^i(t)$ と重力 $F^i(t)$ は、この路によって決まるところの、３次元ベクトル $\alpha^i(t)$ と $\beta^i(t)$ によって、

$$f^i(t) = q\alpha^i(t)\ ,\ F^i(t) = m_0\beta^i(t)$$

と表すことができるだろう。ここで t は時間である。そして、P は自由落下をしているから、この２つの力は釣り合っていて、

$$q\alpha^i(t) = m_0\beta^i(t) \quad (1)$$

とできるだろう。

さて、同じ路上に、電荷 $\bar{q}$ 質量 $\bar{m}_0$ の物体 Q を置いてみよう。路は同じだから $\alpha^i(t)$ と $\beta^i(t)$ はそのまま同じで、Q が受ける電磁力 $\bar{f}^i$ 重力 $\bar{F}^i$ は、

$$\bar{f}^i(t) = \bar{q}\alpha^i(t)\ ,\ \bar{F}^i(t) = \bar{m}_0\beta^i(t)$$

である。式 (1) を変形すると、

$$\frac{q}{m_0}\alpha^i(t) = \beta^i(t)$$

となるが、ここで $q/m_0 = \bar{q}/\bar{m}_0$ の場合を考えると、

$$\frac{\bar{q}}{\bar{m}_0}\alpha^i(t) = \beta^i(t)$$

これから、

$$\bar{q}\alpha^i(t) = \bar{m}_0\beta^i(t)$$

を得る。この式は Q も、また自由落下であることを示すものである。すなわち、電荷と質量の比 q/m_0 が同じならば、その自由落下路も同じだと推論できる。

考察（２）

質点 $(m_0, 0)$ の自由落下路 $x^\lambda(\tau)$ は、５次元の接続係数 ${}^U\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ によって、

$$A_\alpha v^\alpha = 0 \quad , \quad v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

であるところの v^α 方向へ始まる ${}^U[x^\lambda/\tau] = 0$ で表された。これに習って、荷電質点 (m_0, q) の自由落下路 $x^\lambda = a^\lambda(\tau)$ も、ある５次元の接続係数 ${}^5\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ によって、${}^5[x^\lambda/\tau] = 0$ と表されるのだと予想してみよう。

この荷電質点 (m_0, q) の質量 m_0 を $\bar{m}_0$ に変更した、荷電質点 $(\bar{m}_0, q)$ の自由落下路を、$x^\lambda = b^\lambda(\tau)$ とする。このとき、この２つの路の始まる４次元方向 u^i は同じであるとする。${}^5\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は、(x^λ) 上に場として与えられているのだから、${}^5\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の値が、路によって変化することはない。従って、自由落下路 $x^\lambda = b^\lambda(\tau)$ も、やはり ${}^5[x^\lambda/\tau] = 0$ を満たすだろう。しかしながら、電荷と質量の比 q/m_0 が変わったのだから、考察（１）からも、その路はどこか変化することが期待される。もし、路の始まる５次元方向 u^0 も同じとするなら、路はまったく同じになってしまう。従って、u^0 が変化するのだと考えられる。u^0 は自然に決まるものであり、強制できないものであるから、そうであるとしても問題はない。

同じ議論が電荷を変化させた場合にも成り立つ。すなわち、これらの議論から、荷電質点 (m_0, q) の自由落下路が、ある５次元の接続係数 ${}^5\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ によって、${}^5[x^\lambda/\tau] = 0$ と表されるとするならば、(m_0, q) はその開始の５次元方向 u^0 を決める、と推論できる。これに、考察（１）を合わせれば、q/m_0 の値がその開始の５次元方向 u^0 を決める、となる。

さて、特に $q = 0$ の場合を考えるならば、方程式 ${}^5[x^\lambda/\tau] = 0$ は質点の自由落下の方程式となる。すなわち、${}^5\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は§２．７で定義した ${}^U\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の一種でなければならない。${}^U\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の中で最もそれにふさわしいものは、その作り方からいっても、§３で定義した ${}^w\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ だろうと思われる。そこ

で ${}^{w}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ にねらいをつけて、さらに追求してみよう。

考察（3）

方程式 ${}^{w}[x^{\lambda}/\tau]=0$ の解 $x^{\lambda}(\tau)$ は、この路上で

$$A_{\lambda}v^{\lambda} \quad , \quad v^{\lambda}=\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}$$

の値はずっと一定である。なぜならば、

$$\frac{d}{d\tau}(A_{\lambda}v^{\lambda})=({}^{w}\nabla_{\mu}A_{\lambda})v^{\lambda}v^{\mu}+A_{\lambda}({}^{w}\nabla_{\mu}v^{\lambda})v^{\mu}$$

ここで、この右辺第１項は命題 3.4.6 より、

$$({}^{w}\nabla_{\mu}A_{\lambda})v^{\lambda}v^{\mu}=\frac{1}{2}f_{\mu\lambda}v^{\lambda}v^{\mu}=0$$

また、右辺第２項は ${}^{w}[x^{\lambda}/\tau]=0$ より 0 である。このように $A_{\lambda}v^{\lambda}$ は定数である。これを定数 κ とおく。

$$A_{\lambda}v^{\lambda}=\kappa$$

である。

考察（2）によって、荷電質点の自由落下路の開始方向の５次元成分 u^{0} は、q/m_{0} で決まるという結論を得た。一方で、${}^{w}[x^{\lambda}/\tau]=0$ の路の開始方向 u^{0} は、

$$u^{0}=-A_{i}u^{i}+\kappa$$

であるから、開始点の κ の値で決まる。また、特に $q/m_{0}=0$ ならば、このときは質点 $(m_{0},0)$ の自由落下路であるから $\kappa=0$ である。このように、q/m_{0} と κ はその役柄がよく似て見える。そこで、この２つは同じものだと考えてみよう。$q/m_{0}=\kappa$ である。これから、

$$A_{\lambda}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}=\frac{q}{m_{0}}$$

である。

本書では、物理量の単位系については言及しない。色々な数式の中に、比例定数があちこちと顔を出すのはわずらわしいし、また、この段階では純粋に数学的な追求を優先させたいため、単位については比例定数がすべて１になるように取るものと考える。

§５．２　方程式

荷電質点 (m_0, q) の自由落下路 $x^\lambda(\tau)$ を ${}^5[x^\lambda/\tau] = 0$ とする５次元の接続係数の最も有望なものは、その作り方からいっても、§３で定義した ${}^w\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ だろうということになった。ここではそうであると考えて、方程式 ${}^w[x^\lambda/\tau] = 0$ の解がどのようなものかを追求しよう。命題 5.2.1 より、 ${}^w[x^i/\tau] = 0$ は

$$ {}^y[x^i/\tau] + \kappa g^{il} f_{jl} v^j = 0 \quad (1) $$

と書ける。ここまでの結論である $\kappa = q/m_0$ を入れて変形すると、

$$ m_0\, {}^y[x^i/\tau] + q g^{il} f_{jl} v^j = 0 $$

となる。この式の左辺の第１項の負は、質量 m_0 に生じる慣性力を表すように見える。また、第２項は電荷 q に作用する４次元的な電磁力を表すように見える。そうすると、これは慣性力と電磁力のつり合いを示した式になる。すなわち、式 (1) は４次元的な荷電質点 (m_0, q) の自由落下の方程式ということになり、§５．１の考察は当たっていることになる。

さて、方程式 ${}^w[x^\lambda/\tau] = 0$ の正規パラメータ τ はどのようなものだろうか。命題 5.2.3 によれば、

$$ d\tau^2 = \exp(2x^0 - 2\phi) ds^2 \ ,\ ds^2 = G_{ij} dx^i dx^j \ ,\ d\phi = A_\lambda dx^\lambda $$

である。

$$ dx^0 - d\phi = -A_i dx^i $$

であるから、この積分はかって質点の路で定義した時空ポテンシャルである。それを $d\zeta$ と書けば、

$$ d\tau^2 = \exp(2\zeta) ds^2 \quad (2) $$

と書ける。式 (2) を見ると、これは質点の路のときの、固有時を表す式と同じである。従って、ここでも τ はこの路に沿った固有時であると解釈できる。

命題 5.2.1　任意の５次元の路 $x^\lambda(\tau)$ について、次の等式が成り立つ。

$$ {}^w[x^i/\tau] = {}^y[x^i/\tau] + (A_\alpha v^\alpha) g^{il} f_{jl} v^j \ ,\ v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} $$

（証明）　${}^w[x^i/\tau]$ を展開すると、

$$ {}^w[x^i/\tau] = \frac{dv^i}{d\tau} + {}^w\Gamma^i_{jk} v^j v^k + {}^w\Gamma^i_{0j} v^0 v^j + {}^w\Gamma^i_{0k} v^0 v^k + {}^w\Gamma^i_{00} v^0 v^0 \quad (1) $$

である。$\kappa = v^0 + A_l v^l$ とおくと、$v^0 = \kappa - A_l v^l$ である。また、

$$ {}^w\Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2} h^{il} f_{jl} \ , \quad {}^w\Gamma^i_{00} = 0 \quad (2) $$

であることが ${}^w\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ と ${}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の関係よりすぐわかる。これらを式 (1) へ入れると、

$$ {}^w[x^i/\tau] = \frac{dv^i}{d\tau} + {}^w\Gamma^i_{jk} v^j v^k + {}^w\Gamma^i_{0j}(\kappa - A_l v^l) v^j + {}^w\Gamma^i_{0k}(\kappa - A_l v^l) v^k $$

$$ = \frac{dv^i}{d\tau} + ({}^w\Gamma^i_{jk} - {}^w\Gamma^i_{0j} A_k - {}^w\Gamma^i_{0k} A_j) v^j v^k + {}^w\Gamma^i_{0j} v^j \kappa + {}^w\Gamma^i_{0k} v^k \kappa $$

この式の ( ) 内は、命題 3.4.1 より ${}^y\Gamma^i_{jk}$ に等しい。これと式 (2) を使えば、

$$ {}^w[x^i/\tau] = {}^y[x^i/\tau] + \kappa h^{il} f_{jl} v^j $$

(終)

命題 5.2.2　等式

$$ {}^w\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 2A_\lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(f_{\lambda\mu} A_\nu + f_{\lambda\nu} A_\mu) $$

が成り立つ。

(証明)

$$ {}^w\nabla_\lambda h_{\mu\nu} = {}^w\nabla_\lambda g_{\mu\nu} + ({}^w\nabla_\lambda A_\mu) A_\nu + A_\mu ({}^w\nabla_\lambda A_\nu) $$

この式で、§3．3 と命題 3.3.2 より

$$ {}^w\nabla_\lambda h_{\mu\nu} = 2A_\lambda g_{\mu\nu} \ , \quad {}^w\nabla_\lambda A_\mu = \frac{1}{2} f_{\lambda\mu} $$

であるから、これより結果を得る。(終)

命題 5.2.3　方程式 ${}^w[x^\lambda/\tau] = 0$ を満たす路 $x^\lambda(\tau)$ について、r を $dr^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ なるパラメータとするとき、τ と r の間には、次の関係がある。

$$ d\tau^2 = \exp(-2\phi) dr^2 $$

ここで ϕ は、$d\phi = A_\alpha dx^\alpha$ を路に沿って線積分したものである。

(証明)　命題 1.4.1 より、τ と r の間には、

$$ \frac{d^2\tau}{dr^2} + \frac{1}{2}({}^w\nabla_\lambda g_{\mu\nu}) V^\lambda V^\mu V^\nu \frac{d\tau}{dr} = 0 \ , \ V^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dr} \quad (1) $$

の関係がある。命題 5.2.2 と $g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 1$ を用いれば、

$$^w\nabla_\lambda g_{\mu\nu}V^\lambda V^\mu V^\nu = 2A_\lambda V^\lambda$$

となるが、これによって式 (1) は、

$$\frac{dr}{d\tau}\frac{d^2\tau}{dr^2} = -A_\lambda V^\lambda$$

と変化する。これを $d\tau/dr$ について解くと、

$$d\tau^2 = \exp(-2\phi)dr^2$$

(終)

時空理論　第 5 章
2009 年 7 月　Ver1.0　発行
著者：渡辺 満 , 発行者：渡辺 満