第４章 質点の路

質点の自由落下路は、 ${}^{y}[x^i/\tau]=0$ かつ $A_\lambda v^\lambda=0$ なる路であった。これに対し、質点の加速路とは、自由落下路ではない強制された路のことをいう。

これ以降、４次元座標 (x^i) 上に光錐面 G_{ij} と時空ベクトル A_i が与えられた時空を (x^i, G_{ij}, A_i) のように表記する。

§４．１　準備

命題 4.1.1 $G_{ij}v^iv^j \neq 0$ を保つ任意の５次元の路 $x^\lambda(t)$ について、

$$dr^2 = g_{ij}dx^idx^j = \exp(2x^0(t))G_{ij}dx^idx^j \quad , \quad v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dr}$$

とするとき、

$$g_{ij}\ {}^{y}[x^i/r]v^j = -A_\lambda v^\lambda$$

が成り立つ。特に $A_\lambda v^\lambda = 0$ のときは、

$$g_{ij}\ {}^{y}[x^i/r]v^j = 0$$

となり、 ${}^{y}[x^i/r]$ と v^i は G_{ij} や g_{ij} に関して直交する。

（証明）　定義より $g_{ij}v^iv^j = 1$ であるから、これより

$$0 = {}^{y}\nabla_k(g_{ij}v^iv^j)v^k$$

$$= ({}^{y}\nabla_k g_{ij})v^iv^jv^k + 2g_{ij}({}^{y}\nabla_k v^i)v^jv^k$$

この式の第１項については、

$$({}^{y}\nabla_k g_{ij})v^k = \partial_k \exp(2x^0)v^kG_{ij} + \exp(2x^0)({}^{y}\nabla_k G_{ij})v^k$$

$$= 2\exp(2x^0)v^0G_{ij} + 2\exp(2x^0)A_kG_{ij}v^k$$

$$= 2\exp(2x^0)A_\lambda v^\lambda G_{ij} = 2A_\lambda v^\lambda g_{ij}$$

ゆえに、

$$({}^{y}\nabla_k g_{ij})v^iv^jv^k = 2A_\lambda v^\lambda$$

これより結果を得る。(終)

命題 4.1.2 $G_{ij}v^iv^j \neq 0$ を保つ任意の 5 次元の路 $x^\lambda(t)$ について、

$$dr^2 = g_{ij}dx^idx^j \quad , \quad \alpha = \exp(2x^0(t)) \quad , \quad v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dr}$$

とするとき、

$${}^G\nabla_l(\alpha v^i)v^l = \alpha\ {}^y[x^i/r] - G^{ip}A_p + 2\alpha(A_\lambda v^\lambda)v^i$$

が成り立つ。特に $A_\lambda v^\lambda = 0$ のときは、

$${}^G\nabla_l(\alpha v^i)v^l = \alpha\ {}^y[x^i/r] - G^{ip}A_p$$

となる。

(証明)

$${}^G\nabla_l(\alpha v^i)v^l = ({}^G\nabla_l\alpha)v^iv^l + \alpha({}^G\nabla_lv^i)v^l$$

$$({}^G\nabla_l\alpha)v^l = \frac{d\alpha}{dr} = \frac{d}{dr}\exp(2x^0) = 2\alpha v^0$$

$$({}^G\nabla_lv^i)v^l = \frac{dv^i}{dr} + \ {}^G\Gamma^i_{lk}v^lv^k$$

$$= \frac{dv^i}{dr} + ({}^y\Gamma^i_{lk} + \delta^i_lA_k + \delta^i_kA_l - G^{ip}A_pG_{lk})v^lv^k$$

$$= \frac{dv^i}{dr} + \ {}^y\Gamma^i_{lk}v^lv^k + 2(A_kv^k)v^i - G^{ip}A_pG_{lk}v^lv^k$$

これより、

$$({}^G\nabla_l\alpha)v^iv^l = 2\alpha v^0v^i$$

$$\alpha({}^G\nabla_lv^i)v^l = \alpha\ {}^y[x^i/r] + 2\alpha(A_kv^k)v^i - G^{ip}A_p$$

となり、これより結果を得る。(終)

§4.2 単相時空と単相座標

$(x^i, \lambda B_{ij}, A_i)$ のような形の時空を、相が単純であるという意味で、単相時空と呼ぶことにする(この本による造語です)。また、このときの座標 (x^i) を単相座標と呼ぶ。

単相時空は単純でかつ良い性質を示す時空である。命題 4.2.1 に示すように、単相座標では光路は常に直線である。また、§4.3 で示すよう

に単相時空からは $Newton$ の運動方程式に対応するものが導かれる。これらのことから、単相時空とその座標は、我々の身近な物理的世界に、よく対応するものであることがわかる。特に、単相座標は $Newton$ の絶対座標をうまく説明する。

これらを踏まえて、我々の宇宙の時空構造を次のように予想してみる。まず、全宇宙が1枚の単相時空になるというのは考えにくいから、宇宙の各点において局所的に単相になるのだと考えてみる。そうすると、宇宙は各々が単相となる複数の領域

$$U[n] \quad , \quad n = 1, 2, 3, ...$$

によって覆うことができる、となる。

このとき、近接する2つの領域 $U[n]$, $U[m]$ の共通部分に発生する座標変換

$$x^i[n] \to x^i[m]$$

は単相性を保存する。ここで $x^i[n]$ を領域 $U[n]$ の単相座標とする。

では、単相性を保存する座標変換はどの程度にあるのだろうか。単相性を保存する最も単純な座標変換に、$Lorentz$ 変換という一次変換 $(x^i) \to (\bar{x}^i)$ がある。これによって、

$$\bar{G}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \lambda B_{kl} = \lambda B_{ij}$$

となる。ここでは、これ以外の一次変換ではない、単相性を保存する変換の例を上げてみる。

一般的な座標変換は、微小な座標変換の積み重ねとして表現できるだろうから、ここでは微小な座標変換 $(x^i) \to (\bar{x}^i)$ を考える。単相時空 $(x^i, \lambda B_{ij}, A_i)$ に対して、ϵ を微小な定数として、

$$\bar{x}^i = x^i + \epsilon S^i$$

なる座標変換を考える。新座標 $(\bar{x}^i)$ での光錐面 $\bar{G}_{ij}$ を計算してみると、

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} = \delta^i_j - \epsilon \frac{\partial S^i}{\partial \bar{x}^j}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \lambda B_{kl} &= \Big(\delta^k_i - \epsilon \frac{\partial S^k}{\partial \bar{x}^i}\Big)\Big(\delta^l_j - \epsilon \frac{\partial S^l}{\partial \bar{x}^j}\Big) \lambda B_{kl} \\
&= \lambda B_{ij} - \epsilon \lambda (\partial_j S^k B_{ik} + \partial_i S^k B_{jk})
\end{aligned}$$

$$= \lambda B_{ij} - \epsilon\lambda(\partial_j s_i + \partial_i s_j) \quad , \quad s_i = B_{il} S^l$$

ここで ϵ の２次以上の項を無視した。ここでもし、

$$\partial_j s_i + \partial_i s_j = a B_{ij}$$

と書けるのならば、

$$\bar{G}_{ij} = \lambda(1 - \epsilon a) B_{ij}$$

となって、単相性が保存されることになる。命題 4.2.2 にその例を掲げた。

命題 4.2.1　単相時空 $(x^i, \lambda B_{ij}, A_i)$ では光路はすべて直線である。すなわち、任意の光路を $x^i(\tau)$ とするとき、あるパラメータ t があって、$d^2x^i/dt^2 = 0$ とできる。

（証明）　$G_{ij} = \lambda B_{ij}$ であるから、命題 1.7.3 によって、

$${}^G\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j C_k + \delta^i_k C_j - B^{ip} C_p B_{jk} \quad , \quad C_k = \partial_k \log \sqrt{\lambda}$$

$x^i(\tau)$ を任意の光路とし、 $D_k = C_k - A_k$ とおけば、

$${}^y\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j D_k + \delta^i_k D_j - B^{ip} D_p B_{jk}$$

これより、

$$0 = {}^y[x^i/\tau] = \frac{dv^i}{d\tau} + 2(D_k v^k) v^i - B^{ip} D_p B_{jk} v^j v^k \quad , \quad v^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

$x^i(\tau)$ は、ずっと $B_{jk} v^j v^k = 0$ であるから、

$$\frac{dv^i}{d\tau} + 2(D_k v^k) v^i = 0$$

これを $\tau \to t$ すれば、

$$\Big(\frac{dt}{d\tau}\Big)^2 \Big(\frac{dV^i}{dt} + 2D_k V^k V^i\Big) + \frac{d^2 t}{d\tau^2} V^i = 0 \quad , \quad V^i = \frac{dx^i}{dt}$$

これより、

$$\frac{dV^i}{dt} + \Big\{2D_k V^k + \Big(\frac{d\tau}{dt}\Big)^2 \frac{d^2 t}{d\tau^2}\Big\} V^i = 0$$

そこで、 t を

$$2D_k V^k + \Big(\frac{d\tau}{dt}\Big)^2 \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$$

を満たすように決めれば、 $dV^i/dt = 0$ となる。（終）

命題 4.2.2 単相性を保存する２次変換

4 次元時空 (x^i) 上のある点 P の近傍に、スカラー $b(x^1, ..., x^4)$ を与え、点 P の近傍に計量 a_{ij} を、

$$a_{ij} = bB_{ij}$$

と定義する。そして ${}^a\Gamma^k_{pr}$ を a_{ij} の $Christoffel$ の記号とする。以降、a_{ij} と ${}^a\Gamma^k_{pr}$ は点 P での値に固定して考える。このとき、$s_i(x^1, ..., x^4)$ を

$$s_i = a_{ik}\ {}^a\Gamma^k_{pr} x^p x^r$$

と定義すると、

$$\partial_i s_j + \partial_j s_i = 2(\partial_p b) x^p B_{ij}$$

となる。

（証明）　まず、

$$\partial_j s_i = 2a_{ik}\ {}^a\Gamma^k_{jr} x^r$$

となるが、これより

$$\partial_i s_j + \partial_j s_i = 2(a_{ik}\ {}^a\Gamma^k_{jr} + a_{jk}\ {}^a\Gamma^k_{ir}) x^r$$

ここで、この右辺の ( ) 内は命題 1.7.4 より、

$$\partial_r a_{ij} = \partial_r b B_{ij}$$

に等しいから、これより結果を得る。（終）

§４．３　*Newton* 的な運動方程式

ここでは、質点の自由落下路の方程式を、 *Newton* の運動方程式によく似た形に、変形してみる。時空は単相時空 $(x^i, \lambda B_{ij}, A_i)$ とする。

$x^\lambda(r)$ をこの時空の質点の自由落下路とすると、$x^i(r)$ は

$$^y[x^i/r] = 0 \ \ , \ \ dr^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1)$$

を満たす。命題 4.3.1 によれば、この方程式は

$$B_{li}\frac{d}{dr}(\alpha v^i) + C_l = 0 \ , \ v^i = \frac{dx^i}{dr}$$

$$\alpha = \exp(2x^0 + 2\eta) \ , \ \eta = \log\sqrt{\lambda}$$

$$dr^2 = \exp(2x^0)\lambda B_{ij} dx^i dx^j \ , \ C_l = A_l - \partial_l \eta$$

と同値である。両辺に質点の基本質量 m_0 を乗じれば、

$$B_{li}\frac{d}{dr}(m_0\alpha v^i) + m_0 C_l = 0 \quad (2)$$

方程式 (2) は $m_0\alpha v^i$ を運動量とし、 $-C_l$ を重力場とした、 *Newton* の運動方程式に似ている。また、§４．５ で解説するように、 r は固有時だろう。

ここで、 *Newton* のそれと大きく異なるのは、運動量 $m_0\alpha v^i$ に付いた α の存在である。これは、あたかも、この質点の慣性質量が $m_0\alpha$ であるように目に映る。

命題 4.3.1 単相時空 $(x^i, \lambda B_{ij}, A_i)$ 内の $A_\lambda v^\lambda = 0$ なる路 $x^\lambda(r)$ について、等式

$$\alpha\, {}^y[x^i/r] = \frac{d}{dr}(\alpha v^i) + B^{il}C_l\ ,\ v^i = \frac{dx^i}{dr}$$

が成り立つ。ここで

$$\alpha = \exp(2x^0 + 2\eta)\ ,\ \eta = \log\sqrt{\lambda}$$

$$dr^2 = \exp(2x^0)\lambda B_{ij}dx^i dx^j\ ,\ C_l = A_l - \partial_l\eta$$

とする。

（証明） 命題 1.7.3 によって、

$${}^y\Gamma^i_{jk} = -\delta^i_j C_k - \delta^i_k C_j + B^{il}C_l B_{jk}$$

と書ける。これより、

$${}^y[x^i/r] = \frac{dv^i}{dr} - 2(C_l v^l)v^i + \alpha^{-1}B^{il}C_l$$

一方

$$\frac{d}{dr}(\alpha v^i) = 2\alpha\Big(v^0 + \frac{d\eta}{dr}\Big)v^i + \alpha\frac{dv^i}{dr}$$

これより、

$$\alpha\, {}^y[x^i/r] = \frac{d}{dr}(\alpha v^i) - 2\alpha\Big(v^0 + \frac{d\eta}{dr}\Big)v^i - 2\alpha\,(C_l v^l)\,v^i + B^{il}C_l$$

となる。ここで、

$$v^0 + \frac{d\eta}{dr} + C_l v^l = -A_l v^l + \partial_l\eta v^l + C_l v^l = 0$$

であるから、これより結果を得る。（終）

§4.4 固有ベクトル

時空 (x^i, G_{ij}, A_i) 内の任意の5次元の路 $x^\lambda(t)$ について、この路を質点の自由落下路にするような、時空ベクトル $\bar{A}_i$ をこの路上に作れないだろうか、という問題を考えてみよう。この路は $A_\lambda V^\lambda = 0$ を前提としてはならない。

そのような $\bar{A}_i$ があったならば、仮の時空 $(x^i, G_{ij}, \bar{A}_i)$ をこの路上で考えると、$x^\lambda(t)$ はこの仮の時空における質点の自由落下路となり、$\bar{A}_0 = 1$ と定義すれば

$$\bar{A}_\lambda v^\lambda = 0 \quad , \quad v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dt}$$

となるだろう。また、この路のパラメータ r を

$$dr^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \exp(2x^0(t)) G_{ij} dx^i dx^j$$

のように与えると、

$${}^z\Gamma^i_{jk} = {}^G\Gamma^i_{jk} - (\delta^i_j \bar{A}_k + \delta^i_k \bar{A}_j - G^{ip} \bar{A}_p G_{jk})$$

によって、${}^z[x^i/r] = 0$ となるだろう。

この問題の解答は命題 4.4.1 によって与えられる。それによれば、そのような $\bar{A}_i$ は

$$\bar{A}_i = -G_{ip}\ {}^G[x^p/s] - G_{ip} V^p \frac{d^2 r}{ds^2} \frac{ds}{dr} \quad (1)$$

$$V^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds} \ , \ ds^2 = G_{ij} dx^i dx^j$$

によって与えられ、そしてそれは一意に決まる。さらに命題 4.4.2 によって、$\bar{A}_0 = 1$ と定義すると $\bar{A}_\lambda V^\lambda = 0$ も成立し、$x^0(t)$ は $\bar{A}_i$ による時空ポテンシャルとなる。すなわち、(1) の定義によって目的が達成される。この $\bar{A}_i$ をこの一般的な路 $x^\lambda(t)$ の固有ベクトルと名付ける。命題 4.4.2 によれば、

$$\bar{A}_i = A_i - g_{ip}\ {}^y[x^p/r] - 2(A_\lambda v^\lambda) g_{ip} v^p \quad , \quad v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dr} \quad (2)$$

のようにも書ける。命題 4.4.5 によれば、ゲージ変換によって固有ベクトル $\bar{A}_i$ は、時空ベクトル A_i と同じ変換を受けることがわかる。また、

$$\frac{d^2 r}{ds^2} \frac{ds}{dr} = V^0$$

の関係があるから、

$$\bar{A}_i = -G_{ip}\ {}^G[x^p/s] - G_{ip} V^p V^0$$

のようにも書ける。

さて、この一般的な路に沿ったパラメータ ζ, ϕ を、路の小片を dx^λ とするとき、

$$d\zeta = -A_i dx^i \quad , \quad d\phi = dx^0 - d\zeta$$

として定義すれば、 ζ は時空ポテンシャルであるが、 ϕ には

$$d\phi = A_\lambda dx^\lambda$$

の関係ができる。さらに a_λ を

$$\bar{A}_\lambda = A_\lambda + a_\lambda$$

と定義すれば、 $a_0 = 0$ となり、

$$d\phi = -a_i dx^i$$

である。

さて、特に質点の加速路では $A_\lambda v^\lambda = 0$ であるから固有ベクトルは、

$$\bar{A}_i = A_i - g_{ip}\ {}^y[x^p/r] \quad (3)$$

である。さらにこれより、質点の自由落下路の固有ベクトルは A_i 自身であることがわかる。質点の加速路の固有ベクトル $\bar{A}_i$ について、次のような見方ができる。質量 m の質点の加速路には慣性力が生じるが、式 (3) の

$$-g_{ip}\ {}^y[x^p/r] \quad (4)$$

に m を乗じたものが、これに対応している。 (4) をこの加速路自身が生み出した自己場だという風に考えてみよう。そうすると、この路は元々の場 A_i に自己場を加えた場 $\bar{A}_i$ の中の自由落下路という図式が出来上がる。

質点の加速路の固有ベクトルは、さらに進んだ次のような性質を持つ。命題 4.4.3 によれば、

$$\bar{A}_i = -h_{i\lambda}\ {}^h[x^\lambda/r] \quad , \quad dr^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

でもある。さらに命題 4.4.4 によって、

$$1 = -h_{0\lambda}\ {}^h[x^\lambda/r]$$

であるから、結局

$$\bar{A}_\alpha = -h_{\alpha\lambda}\ {}^h[x^\lambda/r]$$

のようにも書ける。

大きさのある物体のような路の連続的な集合において、その各路の固有ベクトル $\bar{A}_i$ を考える。まず、式 (1) を見ればわかるように $\bar{A}_i$ は A_i に無関係に定まる。そして $\bar{A}_0 = 1$ とするとき $\bar{A}_\lambda$ は路に垂直、すなわち $\bar{A}_\lambda v^\lambda = 0$ であるが、この垂直という事実も A_i に無関係である。そこで今、元々の A_i の存在を忘れ、 $\bar{A}_i$ を新しく A_i だと思ってみよう。すると、各路はこの仮の時空 (x^i, G_{ij}, A_i) における質点の自由落下路となり、かつ $A_\lambda v^\lambda$ でもある。この仮の時空 (x^i, G_{ij}, A_i) とこれらの路に対して、命題 4.4.3 と命題 4.4.4 を適用してみれば、

$$A_\alpha = -h_{\alpha\lambda}\ {}^h[x^\lambda/r]$$

となる。この左辺の A_α は実は固有ベクトル $\bar{A}_\alpha$ であり、この右辺の ${}^h\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は元々の A_i によるものではなく、固有ベクトル $\bar{A}_i$ によって作られたそれである。

命題 4.4.1 任意の 4 次元の路 $x^i(\tau)$ に対して、この路上に ${}^z\Gamma^i_{jk}$ を、予めこの路上に与えられているベクトル C_i を使って、次のように定義する。

$$ {}^z\Gamma^i_{jk} = {}^G\Gamma^i_{jk} - (\delta^i_j C_k + \delta^i_k C_j - G^{ip} C_p G_{jk}) \quad (1)$$

このとき、 $x^i(\tau)$ を ${}^z[x^i/\tau] = 0$ とするような C_i は一意に決まり、それは、

$$C_i = -G_{ip}\ {}^G[x^p/s] - G_{ip} V^p \frac{d^2\tau}{ds^2}\frac{ds}{d\tau} \quad (2)$$

である。ここで、

$$ds^2 = G_{ij}dx^i dx^j \quad , \quad V^i = \frac{dx^i}{ds}$$

とする。ここで、パラメータ τ は任意に好きなものを与えることができる。

（証明） そのような C_i があったとすると、 $v^i = dx^i/d\tau$ として、

$$0 = {}^z[x^i/\tau] = {}^G[x^i/\tau] - 2(C_k v^k)v^i + G^{ip} C_p G_{jk} v^j v^k$$

これを、 $G^{ip}C_p$ について解いて、

$$G^{ip}C_p = -\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 {}^G[x^i/\tau] + 2\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 (C_k v^k) v^i \quad (3)$$

これを、 $\tau \to s$ すると、

$$G^{ip}C_p = -\ {}^G[x^i/s] - \left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 \frac{d^2 s}{d\tau^2} V^i + 2(C_k V^k) V^i$$

§１．８の公式 (4) より、

$$\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^2 \frac{d^2 s}{d\tau^2} = -\frac{d^2\tau}{ds^2}\frac{ds}{d\tau}$$

であるから、

$$G^{ip}C_p = -\ {}^G[x^i/s] + \frac{d^2\tau}{ds^2}\frac{ds}{d\tau}V^i + 2(C_k V^k)V^i$$

これより、

$$C_p = -G_{pi}\ {}^G[x^i/s] + G_{pi}\frac{d^2\tau}{ds^2}\frac{ds}{d\tau}V^i + 2G_{pi}(C_k V^k)V^i \quad (4)$$

$$C_p V^p = -G_{pi}\ {}^G[x^i/s]V^p + \frac{d^2\tau}{ds^2}\frac{ds}{d\tau}G_{pi}V^i V^p + 2(C_k V^k)G_{pi}V^i V^p$$

命題 1.7.5 より、右辺第１項は $=0$ 、また $G_{pi}V^i V^p = 1$ より、

$$C_p V^p = -\frac{d^2\tau}{ds^2}\frac{ds}{d\tau}$$

を得る。これを式 (4) へ代入して結果を得る。（終）

命題 4.4.2 任意の５次元の路 $x^\lambda(t)$ について、 $\bar{A}_i$ を

$$\bar{A}_i = -G_{ip}\ {}^G[x^p/s] - \frac{ds}{dr}\frac{d^2 r}{ds^2}G_{ip}V^p$$

と定義すると、

$$\bar{A}_i = A_i - g_{ip}\ {}^y[x^p/r] - 2(A_\lambda v^\lambda)g_{ip}v^p$$

が成り立つ。ここで、

$$dr^2 = g_{ij}dx^i dx^j\ ,\ ds^2 = G_{ij}dx^i dx^j\ ,\ g_{ij} = \exp(2x^0(t))G_{ij}$$

$$v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dr}\ ,\ V^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds}$$

とする。

また $\bar{A}_0 = 1$ と定義すると、 $\bar{A}_\lambda v^\lambda = 0$ となる。

（証明） $\alpha = \exp(2x^0)$ とおく。定義より $dr/ds = \exp(x^0)$ 、これから

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \exp(x^0)V^0 = \frac{dr}{ds}V^0 \quad (1)$$

また、 ${}^{G}\Gamma^i_{jk}$ と ${}^{y}\Gamma^i_{jk}$ の関係を使えば、

$$ {}^{G}[x^i/s] = {}^{y}[x^i/s] + 2(A_kV^k)V^i - G^{ip}A_pG_{jk}V^jV^k $$

これより、

$$ {}^{G}[x^i/s] + \frac{ds}{dr}\frac{d^2r}{ds^2}V^i $$

$$ = {}^{y}[x^i/s] + 2(A_kV^k)V^i - G^{ip}A_p + \frac{ds}{dr}\frac{d^2r}{ds^2}V^i \quad (2) $$

また、

$$ {}^{y}[x^i/s] = \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 {}^{y}[x^i/r] + \frac{d^2r}{ds^2}v^i = \alpha\ {}^{y}[x^i/r] + \alpha v^0v^i $$

これより (2) の右辺は、

$$ = \alpha\ {}^{y}[x^i/r] + \alpha v^0v^i + 2\alpha(A_kv^k)v^i - G^{ip}A_p + \alpha v^0v^i $$

これより、

$$ -\bar{A}_p = g_{pi}\ {}^{y}[x^i/r] + 2(A_\lambda v^\lambda)g_{pi}v^i - A_p $$

これより最初の結果を得る。２番目の結果は、

$$ \bar{A}_iv^i = A_iv^i - g_{ip}\ {}^{y}[x^p/r]v^i - 2(A_\lambda v^\lambda)g_{ip}v^pv^i $$

この右辺第２項に命題 4.1.1 を適用すれば、

$$ \bar{A}_iv^i = A_iv^i + A_\lambda v^\lambda - 2A_\lambda v^\lambda = -v^0 $$

（終）

命題 4.4.3 任意の５次元の路 $x^\lambda(t)$ について、

$$ h_{i\lambda}\ {}^{h}[x^\lambda/t] = g_{ip}\ {}^{y}[x^p/t] + A_i\frac{d\kappa}{dt} + 2\kappa g_{ij}v^j + \kappa f_{ji}v^j - A_ig_{jk}v^jv^k $$

が成り立つ。ここで

$$ g_{ij} = \exp(2x^0(t))G_{ij} \quad , \quad v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dt} \quad , \quad \kappa = A_\lambda v^\lambda $$

とする。

（証明） §３．１で得た ${}^{h}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ と ${}^{u}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の関係を使うと、

$$ {}^{h}[x^\alpha/t] = {}^{u}[x^\alpha/t] + 2\ {}^{h}\Gamma^\alpha_{0\mu}A_\nu v^\mu v^\nu - A^\alpha g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu $$

これより、

$$h_{i\alpha}\ {}^h[x^\alpha/t] = h_{i\alpha}\ {}^u[x^\alpha/t] + 2h_{i\alpha}\ {}^h\Gamma^\alpha_{0\mu} v^\mu \kappa - A_i g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$$

命題 2.6.3 より、

$$h_{i\alpha}\ {}^u[x^\alpha/t] = g_{ip}\ {}^y[x^p/t] + A_i \frac{d\kappa}{dt}$$

命題 2.5.2 より、

$$2h_{i\alpha}\ {}^h\Gamma^\alpha_{0\mu} v^\mu \kappa = 2h_{i\alpha}(h^{\alpha l} g_{l\mu} + \frac{1}{2} h^{\alpha l} f_{\mu l}) v^\mu \kappa = (2g_{ij} + f_{ji}) v^j \kappa$$

これらより結果を得る。(終)

命題 4.4.4 任意の５次元の路 $x^\lambda(t)$ について、

$$h_{0\lambda}\ {}^h[x^\lambda/t] = \frac{d}{dt}(A_\lambda v^\lambda) - g_{ij} v^i v^j \ ,\ v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dt}$$

が成り立つ。ここで

$$g_{ij} = \exp(2x^0(t)) G_{ij}$$

とする。

(証明) §３．１で得た ${}^h\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ と ${}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の関係を使うと、

$${}^h[x^\alpha/t] = {}^u[x^\alpha/t] + 2\ {}^h\Gamma^\alpha_{0\mu} A_\nu v^\mu v^\nu - A^\alpha g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$$

これより、

$$h_{0\alpha}\ {}^h[x^\alpha/t] = h_{0\alpha}\ {}^u[x^\alpha/t] + 2h_{0\alpha}\ {}^h\Gamma^\alpha_{0\mu} v^\mu (A_\nu v^\nu) - g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$$

命題 2.6.2 より、

$$h_{0\alpha}\ {}^u[x^\alpha/t] = \frac{d}{dt}(A_\lambda v^\lambda)$$

右辺第２項は命題 2.5.3 より、

$$h_{0\alpha}\ {}^h\Gamma^\alpha_{0\mu} = A_\alpha\ {}^h\Gamma^\alpha_{0\mu} = 0$$

これらより結果を得る。

命題 4.4.5 ゲージ変換 $G_{ij} \to \lambda G_{ij}$ によって、一般的な５次元の路 $x^\lambda(t)$ の $x^0(t)$ は

$$x^0(t) - \eta(x^i(t)) \quad , \quad \eta = \log\sqrt{\lambda}$$

のように変換されるが、このとき、固有ベクトル $\bar{A}_i$ は

$$\bar{A}_i + \partial_i \log\sqrt{\lambda}$$

のように変換される。

（証明）　変換後の光錐面を f_{ij} 、変換後の固有ベクトルを a_iとする。

$$f_{ij} = \lambda G_{ij}\ ,\ dt^2 = f_{ij}dx^i dx^j\ ,\ u^i = \frac{dx^i}{dt}\ ,\ u^0 = \frac{d}{dt}\{x^0(t) - \eta(x^i(t))\}$$

$$C_i = \partial_i \eta \quad , \quad ds^2 = G_{ij}dx^i dx^j \quad , \quad V^i = \frac{dx^i}{ds}$$

とすると、

$$\begin{aligned} {}^f[x^i/t] &= {}^G[x^i/t] + (\delta^i_j C_k + \delta^i_k C_j - G^{il}C_l G_{jk})u^j u^k \\ &= {}^G[x^i/t] + 2(C_k u^k)u^i - f^{il}C_l \end{aligned}$$

である。一方で

$${}^G[x^i/t] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 {}^G[x^i/s] + \frac{d^2s}{dt^2}V^i$$

である。これらより、

$$\begin{aligned} &{}^f[x^i/t] + u^0u^i \\ &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 {}^G[x^i/s] + \frac{d^2s}{dt^2}V^i + 2(C_k u^k)u^i - \lambda^{-1}G^{il}C_l + u^0u^i \\ &= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 {}^G[x^i/s] + \left(\frac{d^2s}{dt^2} + 2C_k u^k\frac{ds}{dt} + u^0\frac{ds}{dt}\right)V^i - \lambda^{-1}G^{il}C_l \quad (1) \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{ds}{dt} = \lambda^{-1/2} \quad , \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{2}\lambda^{-2}\frac{d\lambda}{ds} \quad , \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-2}\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{d\eta}{ds}$$

$$C_k V^k = \frac{d\eta}{ds} \quad , \quad u^0 = \left(V^0 - \frac{d\eta}{ds}\right)\frac{ds}{dt}$$

を使って、式(1)の第２項を計算すると、

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-2}\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{d\eta}{ds} + V^0 - \frac{d\eta}{ds}\right\}V^i = \lambda^{-1}V^0V^i$$

結局、

$${}^f[x^i/t] + u^0u^i = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 {}^G[x^i/s] + \lambda^{-1}V^0V^i - \lambda^{-1}G^{il}C_l$$

これによって a_p は、

$$a_p = -f_{pi}\ {}^f[x^i/t] - f_{pi}u^0u^i = -G_{pi}\ {}^G[x^i/s] - G_{pi}V^0V^i + C_p$$

これより結果を得る。(終)

§4.5　固有時

質点の自由落下路

$$^{y}[x^{\lambda}/\tau]=0$$

の正規パラメータ τ は、この路に沿った物理的な固有時に対応すると考えられるが、ここでは、その根拠について述べる。

各点慣性座標 (y^i) は、自由落下路上の各点で独立して与えられている。しかし、本来の物理的な慣性座標の模型としては、各点で独立した (y^i) よりも、自由落下路上で一本につながった線状座標のほうが、ふさわしいだろう(線状座標は§1.6)。もし、そういう線状座標 (z^i) が存在するならば、それによって、この自由落下路 $x^i(\tau)$ は (z^i) 上でずっと、

$$\frac{d^2z^4}{d\tau^2}=0$$

となり、τ を z^4 と同一視できることになる。我々はたぶん、この z^4 を、この路上の固有時とみなすことができるだろうから、τ も固有時とみなすことができる。

さて、そういう線状座標 (z^i) が存在することを示してみよう。この路 $x^i(\tau)$ の上のある点 P に、一次独立な基底

$$e^i[n]\quad(n=1,2,3,4)$$

を取り、特に $e^i[4]$ を、

$$e^i[4]=v^i\quad,\quad v^i=\frac{dx^i}{d\tau}$$

として与える。そして、この基底を、この路上で $^{y}\Gamma^i_{jk}$ について平行に移動し、路全体に拡張する。このようにすれば、命題 1.6.1 によってこの路上で、

$$e^i[n]=\frac{\partial x^i}{\partial z^n}\quad,\quad {}^{y}\Gamma^i_{jk}=\frac{\partial x^i}{\partial z^l}\frac{\partial^2z^l}{\partial x^j\partial x^k}$$

を満たすような線状座標 (z^i) を作ることができる。

さて、命題 4.5.1 によれば、この路上で $^{y}\Gamma^i_{jk}$ と計量 g_{ij} は同期している。従って、命題 1.5.1 によって

$$g_{ij}e^i[m]e^j[n]$$

の値は、この路に沿ってずっと一定である。これによって、この路に沿って、各 $e^i[n]$ の計量 g_{ij} に関する大きさはずっと一定であり、また、各

$e^i[n]$ を互いに計量 g_{ij} に関して直交するように取ったならば、その直交性がずっと保たれる。

◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦

このようにして、質点の自由落下路 ${}^y[x^i/\tau] = 0$ の正規パラメータ τ が、固有時に同期していると考えた訳だが、一般の 4 次元路 $x^i(t)$ においても、次のようにして作るパラメータ τ は、固有時に同期していると予想することができる。

$$d\tau^2 = \exp(2\zeta) G_{ij} dx^i dx^j \quad , \quad d\zeta = -A_k dx^k$$

一般の 4 次元路 $x^i(t)$ において、このパラメータ τ を用いれば、

$$G_{ij} \ {}^y[x^i/\tau] v^j = 0 \quad , \quad v^j = \frac{dx^i}{d\tau}$$

が成り立つ。それは、この路において仮に $x^0(t) = \zeta(t)$ と置いて、命題 4.1.1 を適用するとわかる。

おもしろいことに、命題 4.5.2 によれば、この逆が成り立つ。すなわち、一般の 4 次元路 $x^i(t)$ が、このパラメータ t によって、

$$G_{ij} \ {}^y[x^i/t] v^j = 0 \quad , \quad v^j = \frac{dx^i}{dt}$$

となっているならば、 t は固有時である。この事実は、別の方法で固有時を特徴付けている。

◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦

さて、ここまでの結果を元にして、物体についておもしろい見解を述べてみよう。質点の路の τ が固有時だということは、固有時は時空ポテンシャルの影響を受けるということである。

ここで質点から大きさのある物体に、目を移してみよう。物体という物理現象は固有時に支配されていて、固有時抜きで考えることはできない。逆に言えば、物体という物理現象そのものが、固有時を表現するとも言えるだろう。これは、我々の使用する時計がすべて、物体という物理現象を利用していることからもわかる。

我々は、 A_i によって発生する時空ポテンシャルを知っている。しかし、物体内には初めから時空ポテンシャルが存在し、それが A_i の作用によって増減すると考えるべきだろう。すなわち、物体内には時空ポテンシャルという場が常に存在し、それが物体の固有時を支配している、ということだろう。§7によれば、時空ポテンシャルは物体の大きさにも影響を与えるらしい。

◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦

命題 4.5.1 時空 (x^i, G_{ij}, A_i) 上の任意の５次元の路 $x^\lambda(t)$ 上で、計量

$$g_{ij} = \exp(2x^0(t))G_{ij}$$

と接続係数 ${}^z\Gamma^i_{jk}$ は同期している。すなわち、

$$({}^z\nabla_k g_{ij})v^k = 0 \quad , \quad v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dt}$$

となる。ここで ${}^z\Gamma^i_{jk}$ は§４．４で定義したそれである。また、 g_{ij} はこの路上にしか定義されていないので $\partial_k g_{ij}$ は計算できないが、

$$(\partial_k g_{ij})v^k = \frac{d}{dt} g_{ij}$$

なので問題はない。

（証明）

$$({}^z\nabla_k g_{ij})v^k = (\partial_k g_{ij})v^k - ({}^z\Gamma^l_{ki} g_{jl} + {}^z\Gamma^l_{kj} g_{il})v^k \quad (1)$$

式(1)の右辺第１項は、

$$\partial_k\{\exp(2x^0)G_{ij}\}v^k = \frac{d}{dt}\{\exp(2x^0)G_{ij}\}$$

$$= 2\exp(2x^0)\frac{dx^0}{dt}G_{ij} + \exp(2x^0)(\partial_k G_{ij})v^k$$

式(1)の右辺第２項は、

$$= -\exp(2x^0)({}^z\Gamma^l_{ki} G_{jl} + {}^z\Gamma^l_{kj} G_{il})v^k$$

これらより、

$$({}^z\nabla_k g_{ij})v^k = 2\exp(2x^0)v^0 G_{ij} + \exp(2x^0)({}^z\nabla_k G_{ij})v^k$$

命題 3.1.3 を参考にすれば、 ${}^z\nabla_k G_{ij} = 2\bar{A}_k G_{ij}$ であることがわかる。また、固有ベクトル $\bar{A}_i$ の性質より、

$$v^0 = -\bar{A}_k v^k$$

これより結果を得る。（終）

命題 4.5.2 $G_{ij}v^iv^j \neq 0$ を保つ任意の４次元の路 $x^i(t)$ が、この路上の至る所で、

$$G_{ij}\ {}^y[x^i/t]v^j = 0 \quad , \quad v^j = \frac{dx^j}{dt}$$

ならば、このとき、このパラメータ t は必然的に

$$dt^2 = \exp(2\zeta)G_{ij}dx^idx^j \quad , \quad d\zeta = -A_kdx^k$$

と書ける。

（証明）

$${}^y[x^i/t] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\ {}^y[x^i/s] + \frac{d^2s}{dt^2}V^i \quad , \quad V^i = \frac{dx^i}{ds}$$

$${}^y[x^i/s] = \ {}^G[x^i/s] - 2(A_kV^k)V^i + G^{il}A_lG_{jk}V^jV^k$$

であるから、これらより

$$G_{ij}\ {}^y[x^i/t]V^j = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\{G_{ij}\ {}^G[x^i/s]V^j - 2(A_kV^k) + A_kV^k\} + \frac{d^2s}{dt^2}$$

ここで命題 1.7.5 によれば、

$$G_{ij}\ {}^G[x^i/s]V^j = 0$$

だから、これらより式

$$\frac{d^2s}{dt^2} - (A_kV^k)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0$$

を得る。これより

$$\frac{dt}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} = A_k\frac{dx^k}{dt}$$

であり、さらに

$$\frac{d}{dt}\log\frac{ds}{dt} = A_k\frac{dx^k}{dt}$$

である。これより結果を得る。（終）

§４．６　物体面

§４．６．１　物体面

$$A_\lambda v^\lambda = 0 \quad , \quad v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\tau}$$

を満たすような路 $x^\lambda(\tau)$ を考える。質点の自由落下路はこれに属する。

さて、 命題 4.6.1 に従って、この路とこの路の周りに ζ を、

$$A_i = -\partial_i \zeta$$

となるように定義する。すると、

$$a(\tau) = x^0(\tau) - \zeta(\tau)$$

において、

$$\frac{da}{d\tau} = v^0 - \frac{d\zeta}{d\tau} = v^0 + A_i v^i = 0$$

すなわち、この a は定数である。すると、

$$\bar{\zeta} = \zeta + a$$

なる $\bar{\zeta}$ は、この路上で $x^0(\tau)$ に一致する。そこで改めて、この $\bar{\zeta}$ を ζ としよう。

さて、こうしてできたこの路の周りの４次元面

$$x^0 = \zeta(x^1, ..., x^4)$$

を、この路の物体面と呼ぶ。命題 3.5.3 によれば、 A_λ は、この物体面に垂直である。

§４．６．２　変分原理

ここまでは、質点の自由落下路と変分原理の関係には何も触れなかったが、ここでは変分原理によって、質点の自由落下路の方程式を導いてみよう。５次元時空での単なる測地線の方程式は、

$$^h[x^\lambda/\tau] = 0$$

で、これは自由落下路にならない。そこで工夫が必要になる。

その方法は通常の測地線の方程式を導くように、点 P から Q へ向かう路で、その長さが極値となるものを求めるのだが、そのとき変分 δx^λ を自由にとるのではなく、A_λ に垂直なもののみに制限する。すなわち、路を物体面方向にずらすのである。そうすると $^w[x^\lambda/\tau] = 0$ が得られることを示す。

５次元時空の中で、点 P から Q へ向かう路を $x^\lambda(t)$ としよう。 $v^\lambda = dx^\lambda/dt$ とし、 $x^\lambda(t)$ は $A_\lambda v^\lambda = 0$ を満たすとする。 P から Q までのこの路の長さ I は、

$$L = (h_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu)^{1/2}$$

とするとき、

$$I = \int_P^Q L dt$$

で与えられる。これを変分すると、

$$\delta I = \int_P^Q \delta L dt$$

であるが、命題 4.6.3 によれば、

$$\delta L = -L^{-1} h_{\lambda\mu} \ {}^h[x^\lambda/t] \delta x^\mu - \frac{dL^{-1}}{dt} h_{\lambda\mu} v^\lambda \delta x^\mu + \frac{d}{dt}(L^{-1} h_{\lambda\mu} v^\lambda \delta x^\mu)$$

であるから、これによって

$$\delta I = -\int_P^Q (L^{-1} h_{\lambda\mu} \ {}^h[x^\lambda/t] + \frac{dL^{-1}}{dt} h_{\lambda\mu} v^\lambda) \delta x^\mu dt$$

となる。 $A_\lambda \delta x^\lambda = 0$ となる任意の δx^λ によって、この作用積分 δI が 0 になればよいのだから、ある a があって、

$$L^{-1} h_{\lambda\mu} \ {}^h[x^\lambda/t] + \frac{dL^{-1}}{dt} h_{\lambda\mu} v^\lambda = a A_\mu$$

となればよいことがわかる。 a を決めるために、この式の両辺に A^μ をほどこしてみると、 $A_\lambda v^\lambda = 0$ であるから、

$$L^{-1} A_\lambda \ {}^h[x^\lambda/t] = a$$

となる。命題 4.4.4 を使用すれば、

$$-L^{-1} g_{ij} v^i v^j = a$$

となり、

$$L^2 = g_{ij} v^i v^j$$

であることより、 $a = -L$ を得る。これより方程式

$$h_{\lambda\mu} \ {}^h[x^\lambda/t] + L \frac{dL^{-1}}{dt} h_{\lambda\mu} v^\lambda + (g_{ij} v^i v^j) A_\mu = 0 \quad (1)$$

が得られる。ここで ${}^h\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ と ${}^w\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の関係

$${}^h\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^w\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + h^{\lambda\alpha}(g_{\mu\alpha} A_\nu + g_{\nu\alpha} A_\mu - g_{\mu\nu} A_\alpha)$$

を用いれば、 $A_\lambda v^\lambda = 0$ なる $x^\lambda(t)$ に対して、

$${}^h[x^\lambda/t] = {}^w[x^\lambda/t] - (g_{ij} v^i v^j) A^\lambda$$

であることがわかるから、これによって式 (1) は、

$$ {}^{w}[x^\lambda/t] + L\frac{dL^{-1}}{dt}v^\lambda = 0 \quad (2) $$

となる。

$x^\lambda(t)$ が式 (2) を満たすとき、これをパラメータ変換 $t \to r$ すると、

$$ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 {}^{w}[x^\lambda/r] + \frac{d^2r}{dt^2}\frac{dx^\lambda}{dr} + L\frac{dL^{-1}}{dt}v^\lambda = 0 $$

となるが、

$$ dr^2 = g_{ij}dx^i dx^j $$

とすれば、 $dr/dt = L$ であるから、

$$ \frac{d^2r}{dt^2}\frac{dx^\lambda}{dr} = \frac{dL}{dt}v^\lambda L^{-1} $$

となり、これよりこの方程式は

$$ L^2\ {}^{w}[x^\lambda/r] = 0 $$

となる。これより、方程式 (2) の解 $x^\lambda(t)$ は、パラメータを r にすれば ${}^{w}[x^\lambda/r] = 0$ を満たすことがわかる。

命題 4.6.1 一般的に、4 次元空間 (x^i) 内に、路 $x^i(t)$ と、$x^i(t)$ 上にベクトル A_i が与えられているとき、この路上で

$$ A_i = -\partial_i\zeta \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4 $$

となるような ζ を、この路および、その近傍に定義することができる。

（証明） この路をちょうど z^4 軸にするような座標 (z^i) を、この路の近傍にとり、 (z^i) 上で考える。（本当は (z^i) が取れることの証明が必要だが、たいへんそうなので省略する）

まず、 z^4 軸上に始点 Q を適当に定めて、 z^4 軸上の $\zeta(P)$ を、

$$ \zeta(P) = -\int_Q^P \bar{A}_4 dz^4 \quad (1) $$

で与える。ここで $\bar{A}_i$ は (z^i) 上の A_i とする。 z^4 軸に近い点 R

$$ R = (z^1, z^2, z^3, z^4) $$

については、

$$\zeta(R) = \zeta(0,0,0,z^4) - \bar{A}_a(0,0,0,z^4)z^a \quad , \quad a = 1,2,3 \quad (2)$$

とする。このようにすれば、まず (1) より、

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z^4} = -\bar{A}_4$$

また (2) より、

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z^a}dz^a = -\bar{A}_a dz^a$$

これは任意の dz^a について成り立つから、

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z^a} = -\bar{A}_a$$

この２つから、

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z^i} = -\bar{A}_i$$

これを (x^i) 上に持っていけば、結果が得られる。（終）

命題 4.6.2　５次元時空内で、 $x^\lambda(\tau)$ を

$$A_\lambda v^\lambda = 0 \quad , \quad v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\tau}$$

を満たすような路、 ζ をその物体面とする。このとき a_{ij} を、

$$a_{ij} = \exp(2\zeta)G_{ij}$$

と定義すると、この路上で

$$^y\nabla_k a_{ij} = 0$$

である。

（証明）

$$^y\nabla_k a_{ij} = \partial_k \exp(2\zeta)G_{ij} + \exp(2\zeta)^y\nabla_k G_{ij}$$

ここで、

$$^y\nabla_k G_{ij} = 2A_k G_{ij}$$

であるから、

$$^y\nabla_k a_{ij} = 2\exp(2\zeta)G_{ij}(A_k + \partial_k\zeta)$$

これより結果を得る。（終）

命題 4.6.3　N 次元空間に計量 g_{ij} が与えられているとする。曲線 $x^i(t)$ 上に L を

$$L = (g_{ij}v^i v^j)^{1/2} \quad , \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}$$

と定義する。このとき、 $x^i(t)$ を $\delta x^i(t)$ 変分したときの L の変分 δL の値は、

$$\delta L = -L^{-1} g_{ij}\ {}^{g}[x^i/t]\delta x^j - \frac{dL^{-1}}{dt} g_{ij} v^i \delta x^j + \frac{d}{dt}(L^{-1} g_{ij} v^i \delta x^j)$$

である。

（証明）

$$\delta g_{ij} = \partial_k g_{ij} \delta x^k \ , \ \delta v^i = \frac{d}{dt}\delta x^i$$

であるから、

$$\delta L = \frac{1}{2} L^{-1}\Big(\partial_k g_{ij} v^i v^j \delta x^k + 2 g_{ij} v^i \frac{d}{dt}\delta x^j\Big)$$

この右辺第２項は、

$$L^{-1} g_{ij} v^i \frac{d}{dt}\delta x^j = H - \frac{d}{dt}(L^{-1} g_{ij} v^i)\delta x^j \quad (1)$$

ここで、

$$H = \frac{d}{dt}(L^{-1} g_{ij} v^i \delta x^j)$$

とおいた。式 (1) の右辺第２項は、

$$-\frac{d}{dt}(L^{-1} g_{ij} v^i)\delta x^j = -\frac{dL^{-1}}{dt} g_{ij} v^i \delta x^j - L^{-1}\partial_k g_{ij} v^i v^k \delta x^j - L^{-1} g_{ij}\frac{dv^i}{dt}\delta x^j$$

$$= \Big(-\frac{dL^{-1}}{dt} g_{ik} v^i - L^{-1}\partial_j g_{ik} v^i v^j - L^{-1} g_{ik}\frac{dv^i}{dt}\Big)\delta x^k$$

これらより、

$$\delta L = H + \Big(\frac{1}{2}L^{-1}\partial_k g_{ij} v^i v^j - \frac{dL^{-1}}{dt} g_{ik} v^i - L^{-1}\partial_j g_{ik} v^i v^j - L^{-1} g_{ik}\frac{dv^i}{dt}\Big)\delta x^k$$

これを変形すると、

$$\delta L = H - \frac{1}{2}L^{-1}(2\partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) v^i v^j \delta x^k$$

$$-\Big(\frac{dL^{-1}}{dt} g_{ik} v^i + L^{-1} g_{ik}\frac{dv^i}{dt}\Big)\delta x^k$$

$$= -L^{-1} g_{kl}\ {}^{g}\Gamma^{l}_{ij} v^i v^j \delta x^k - \left(\frac{dL^{-1}}{dt} g_{ik} v^i + L^{-1} g_{ik} \frac{dv^i}{dt} \right) \delta x^k + H$$

これより結果を得る。(終)

時空理論　第4章
2012年4月　Ver1.1　発行
2013年2月　Ver1.2　発行
著者：渡辺 満 , 発行者：渡辺 満