第３章　５次元各点座標

第２章では、物理的な局所慣性座標の数学的表現として、４次元各点座標 ${}^{y}\Gamma^{i}_{jk}$ を定義した。ここでは似たようなものが、５次元 (x^λ) 上でも作れないかと考える。そして、５次元各点座標 (w^λ) を定義する。その過程において、おもしろいことに ${}^{y}\Gamma^{i}_{jk}$ の構造が具体的に決定する。

$${}^{y}\Gamma^{i}_{jk} = {}^{G}\Gamma^{i}_{jk} - (\delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j - G^{il} A_l G_{jk})$$

§３．１　基底

ここを読むにあたっては、§１．２ を参照されたい。$B_{\lambda\mu}$ を B_{ij} の拡張として、次のように定義する。

$$B_{0i} = B_{i0} = 0 \quad , \quad B_{00} = 1$$

同様に、 $B^{\lambda\mu}$ を B^{ij} の拡張として、次のように定義する。

$$B^{0i} = B^{i0} = 0 \quad , \quad B^{00} = 1$$

これらについて、

$$B^{\lambda\mu} B_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\nu$$

が成り立つ。

さて、(x^λ) 上の５次元各点座標 (w^λ) を考え、(x^λ) 上の $h_{\lambda\mu}$ は (w^λ) では $B_{\lambda\mu}$ であるとしよう。すると、

$$h_{\lambda\mu} = \frac{\partial w^\nu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\mu} B_{\nu\alpha} = \frac{\partial w^0}{\partial x^\lambda}\frac{\partial w^0}{\partial x^\mu} + \frac{\partial w^i}{\partial x^\lambda}\frac{\partial w^j}{\partial x^\mu} B_{ij}$$

であるが、ここで

$$\frac{\partial w^0}{\partial x^\lambda}\frac{\partial w^0}{\partial x^\mu} = A_\lambda A_\mu \quad , \quad \frac{\partial w^i}{\partial x^\lambda}\frac{\partial w^j}{\partial x^\mu} B_{ij} = g_{\lambda\mu}$$

$$g_{\lambda\mu} = \exp(2x^0) G_{\lambda\mu}$$

であると仮定しよう。こうなるためには、

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$$\frac{\partial w^0}{\partial x^\lambda} = A_\lambda \quad , \quad \frac{\partial w^i}{\partial x^0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial w^i}{\partial x^k}\frac{\partial w^j}{\partial x^l} B_{ij} = g_{kl} \qquad (1)$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

となっていればよい。(1) は、$\partial w^\lambda/\partial x^\mu$ をもれなく重複なく与えている。次に、この逆の

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial w^\lambda}\frac{\partial x^\alpha}{\partial w^\mu}h_{\nu\alpha} = \frac{\partial x^\nu}{\partial w^\lambda}\frac{\partial x^\alpha}{\partial w^\mu}A_\nu A_\alpha + \frac{\partial x^i}{\partial w^\lambda}\frac{\partial x^j}{\partial w^\mu}g_{ij}$$

を見て、

$$\frac{\partial x^i}{\partial w^0} = 0$$

としてみる。$\bar{A}_\lambda$ を (w^λ) 上の A_λ とすると、

$$\bar{A}_\lambda = \frac{\partial x^\alpha}{\partial w^\lambda}A_\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial w^\lambda}\frac{\partial w^0}{\partial x^\alpha} = \delta^0_\lambda$$

ここで(1) のひとつを用いている。一方で、

$$\bar{A}_\lambda = \frac{\partial x^0}{\partial w^\lambda}A_0 + \frac{\partial x^k}{\partial w^\lambda}A_k$$

である。これより、

$$\frac{\partial x^0}{\partial w^\lambda} = -\frac{\partial x^k}{\partial w^\lambda}A_k + \delta^0_\lambda$$

を得る。まとめると、

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial w^0} = \delta^\lambda_0 \quad , \quad \frac{\partial x^0}{\partial w^i} = -\frac{\partial x^k}{\partial w^i}A_k \quad , \quad \frac{\partial x^k}{\partial w^i}\frac{\partial x^l}{\partial w^j}g_{kl} = B_{ij} \qquad (2)$$

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

これらは、 $\partial x^\lambda/\partial w^\mu$ をもれなく重複なく与えている。

この(1)と(2)について、うまいことに、

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial w^\alpha}\frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta^\lambda_\mu \quad , \quad \frac{\partial w^\lambda}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial w^\mu} = \delta^\lambda_\mu$$

を確認することができる。このように (w^λ) の基底が(1)と(2)のように、自然な流れで決定した。

最後に、この結果を用いて、

$$h^{\lambda\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial w^\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial w^\alpha}B_{\nu\alpha}$$

より　$h_{\lambda\mu}$ の逆行列 $h^{\lambda\mu}$ を計算することができる。実は§２．５ のものは、これを用いて求めた。

§３．２ ${}^{w}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$

ここでは、平坦な５次元時空を局所化してみよう。

曲がりのない平坦な時空は、

$$G_{ij} = B_{ij} \quad , \quad A_i = 0$$

で表される。この時空では、 $h_{\lambda\mu}$ は $x^1, ..., x^4$ 方向には一定であるから、

$$\partial_i h_{\lambda\mu} = 0$$

また x^0 方向では、

$$\partial_0 h_{\lambda 0} = \partial_0 A_\lambda = 0$$

$$\partial_0 h_{ij} = \partial_0 \exp(2x^0) B_{ij} = 2\exp(2x^0) B_{ij} = 2g_{ij}$$

となっている。従って、曲がりのない平坦な時空の特徴を、微分の形で表現すると、これらをまとめて、

$$\partial_\alpha h_{\lambda\mu} = 2\delta^0_\alpha g_{\lambda\mu}$$

と書ける。

そこで、一般的な時空においてある５次元各点座標 (w^λ) を考え、$\bar{h}_{\lambda\mu}$ と $\bar{g}_{\lambda\mu}$ を、 (w^λ) 上の $h_{\lambda\mu}$ と $g_{\lambda\mu}$ とするとき、 (w^λ) 上では

$$\frac{\partial \bar{h}_{\lambda\mu}}{\partial w^\alpha} = 2\delta^0_\alpha \bar{g}_{\lambda\mu} \quad (1)$$

が成り立つとする。

まず、このような (w^λ) が存在すると仮定する。共変微分の定義によって、

$${}^{w}\nabla_\lambda h_{\mu\nu} = \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial w^\beta}{\partial x^\mu}\frac{\partial w^\gamma}{\partial x^\nu}\frac{\partial \bar{h}_{\beta\gamma}}{\partial w^\alpha}$$

であるが、右辺に式 (1) を適用すれば、

$$= \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial w^\beta}{\partial x^\mu}\frac{\partial w^\gamma}{\partial x^\nu} 2\delta^0_\alpha \bar{g}_{\beta\gamma}$$

$$= \frac{\partial w^0}{\partial x^\lambda} 2 \frac{\partial w^\beta}{\partial x^\mu}\frac{\partial w^\gamma}{\partial x^\nu}\bar{g}_{\beta\gamma}$$

結局、

$${}^{w}\nabla_\lambda h_{\mu\nu} = 2\frac{\partial w^0}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu}$$

を得る。さらに、この (w^λ) の基底を §３．１ のように取れば、

$$\frac{\partial w^0}{\partial x^\lambda} = A_\lambda$$

であるから、

$$ {}^{w}\nabla_{\lambda} h_{\mu\nu} = 2A_{\lambda} g_{\mu\nu} \quad (2) $$

となる。

さて、共変微分の定義より、

$$ {}^{w}\nabla_{\lambda} h_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} h_{\mu\nu} - {}^{w}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} h_{\alpha\nu} - {}^{w}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} h_{\alpha\mu} \quad (3) $$

$$ {}^{w}\nabla_{\mu} h_{\nu\lambda} = \partial_{\mu} h_{\nu\lambda} - {}^{w}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} h_{\alpha\lambda} - {}^{w}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} h_{\alpha\nu} \quad (4) $$

$$ {}^{w}\nabla_{\nu} h_{\lambda\mu} = \partial_{\nu} h_{\lambda\mu} - {}^{w}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} h_{\alpha\mu} - {}^{w}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} h_{\alpha\lambda} \quad (5) $$

この３式の左辺と右辺に対して、和 (3) + (4) − (5) をとれば、左辺の和は

$$ {}^{w}\nabla_{\lambda} h_{\mu\nu} + {}^{w}\nabla_{\mu} h_{\nu\lambda} - {}^{w}\nabla_{\nu} h_{\lambda\mu} $$

これに式 (2) を使用して、

$$ = 2A_{\lambda} g_{\mu\nu} + 2A_{\mu} g_{\nu\lambda} - 2A_{\nu} g_{\lambda\mu} \quad (6) $$

右辺の和は、

$$ \partial_{\lambda} h_{\mu\nu} + \partial_{\mu} h_{\nu\lambda} - \partial_{\nu} h_{\lambda\mu} - 2\, {}^{w}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} h_{\alpha\nu} \quad (7) $$

式 (6)=(7) の両辺に $h^{\beta\nu}/2$ をほどこせば、

$$ h^{\beta\nu}(A_{\lambda} g_{\mu\nu} + A_{\mu} g_{\nu\lambda} - A_{\nu} g_{\lambda\mu}) = {}^{h}\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu} - {}^{w}\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu} $$

これより

$$ {}^{w}\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu} = {}^{h}\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu} - h^{\beta\nu}(A_{\lambda} g_{\mu\nu} + A_{\mu} g_{\lambda\nu} - A_{\nu} g_{\lambda\mu}) \quad (8) $$

を得る。すなわち、このような (w^{λ}) が存在すると仮定すると、 (8) のような形になる。

そこで、今度は逆に式 (8) によって、各点座標 (w^{λ}) を定義してみよう。式 (8) を使って ${}^{w}\nabla_{\lambda} h_{\mu\nu}$ を計算してみると、共変微分の定義より、

$$ {}^{w}\nabla_{\lambda} h_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} h_{\mu\nu} - {}^{w}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} h_{\alpha\nu} - {}^{w}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} h_{\alpha\mu} $$

これに式 (8) を使うと、

$$ - {}^{w}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} h_{\alpha\nu} = - {}^{h}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} h_{\alpha\nu} + h^{\alpha\gamma}(A_{\lambda} g_{\mu\gamma} + A_{\mu} g_{\lambda\gamma} - A_{\gamma} g_{\lambda\mu}) h_{\alpha\nu} $$

$$ = - {}^{h}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} h_{\alpha\nu} + (A_{\lambda} g_{\mu\nu} + A_{\mu} g_{\lambda\nu} - A_{\nu} g_{\lambda\mu}) $$

$$ - {}^{w}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} h_{\alpha\mu} = - {}^{h}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} h_{\alpha\mu} + (A_{\lambda} g_{\nu\mu} + A_{\nu} g_{\lambda\mu} - A_{\mu} g_{\lambda\nu}) $$

これらより、

$$ {}^{w}\nabla_\lambda h_{\mu\nu} = {}^{h}\nabla_\lambda h_{\mu\nu} + 2A_\lambda g_{\mu\nu} = 2A_\lambda g_{\mu\nu} \quad (9) $$

を得る。そこでこの両辺に、

$$ \frac{\partial x^\lambda}{\partial w^\alpha}\frac{\partial x^\mu}{\partial w^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial w^\gamma}\,{}^{w}\nabla_\lambda h_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial w^\alpha}\frac{\partial x^\mu}{\partial w^\beta}\frac{\partial x^\nu}{\partial w^\gamma}2A_\lambda g_{\mu\nu} $$

を行えば、左辺は共変微分の定義により、右辺はテンソルの座標変換により、

$$ \frac{\partial \bar{h}_{\beta\gamma}}{\partial w^\alpha} = 2\bar{A}_\alpha \bar{g}_{\beta\gamma} $$

ここで、 (w^λ) の基底を §３．１ のようにとっておけば、

$$ \bar{A}_\alpha = \delta^0_\alpha $$

とできるから、

$$ \frac{\partial \bar{h}_{\beta\gamma}}{\partial w^\alpha} = 2\delta^0_\alpha \bar{g}_{\beta\gamma} $$

すなわち、式 (8) のように (w^λ) をとれば、目標の５次元各点座標が得られることになる。

§３．３ ${}^{y}\Gamma^i_{jk}$ の決定

第２章で、 ${}^{y}\Gamma^i_{jk}$ の５次元への拡張として ${}^{u}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を、さらに、その一般化として ${}^{U}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を定義した。

$$ {}^{U}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + (K^\lambda_\mu A_\nu + K^\lambda_\nu A_\mu) $$

さて ${}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の作り方からいって、 ${}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ が ${}^{U}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の１種だろうということが期待できる。そう仮定すると、${}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ と ${}^{y}\Gamma^i_{jk}$ が次のようにうまく決まるのである。

$$ {}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h^{\lambda\alpha}(f_{\mu\alpha}A_\nu + f_{\nu\alpha}A_\mu) \quad (1) $$

$$ {}^{y}\Gamma^i_{jk} = {}^{G}\Gamma^i_{jk} - (\delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j - G^{il}A_l G_{jk}) \quad (2) $$

命題 3.4.3 に見るように、この ${}^{y}\Gamma^i_{jk}$ はゲージ変換によって、値が変化しない。

さて、これから (1),(2) の導出を行ってみよう。 §３．２ の結果より、

$$ {}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^{h}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - h^{\lambda\alpha}(A_\mu g_{\nu\alpha} + A_\nu g_{\mu\alpha} - A_\alpha g_{\mu\nu}) \quad (3) $$

まず、この ${}^{w}\Gamma^{\lambda}_{\mu 0}$ と ${}^{U}\Gamma^{\lambda}_{\mu 0}$ を比較すると、

$$ {}^{w}\Gamma^{\lambda}_{\mu 0} = {}^{h}\Gamma^{\lambda}_{\mu 0} - h^{\lambda\alpha} g_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} h^{\lambda l} f_{\mu l} $$

$$ {}^{U}\Gamma^{\lambda}_{\mu 0} = K^{\lambda}_{\mu} + K^{\lambda}_{0} A_{\mu} $$

この２つが等しいためには、

$$ K^{\lambda}_{\mu} = \frac{1}{2} h^{\lambda l} f_{\mu l} $$

であればよい。これによって、

$$ {}^{U}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha} (f_{\mu\alpha} A_{\nu} + f_{\nu\alpha} A_{\mu}) \quad (4) $$

と書ける。

次に ${}^{w}\Gamma^{i}_{jk}$ と、この ${}^{U}\Gamma^{i}_{jk}$ を比較してみよう。(3) より、

$$ {}^{w}\Gamma^{i}_{jk} = {}^{h}\Gamma^{i}_{jk} - h^{il}(A_j g_{kl} + A_k g_{jl}) + A^i g_{jk} $$

$$ = {}^{G}\Gamma^{i}_{jk} + g^{il} A_l g_{jk} + \frac{1}{2} g^{il} (f_{jl} A_k + f_{kl} A_j) - \delta^i_j A_k - \delta^i_k A_j $$

もう一方は(4) より、

$$ {}^{U}\Gamma^{i}_{jk} = {}^{u}\Gamma^{i}_{jk} + \frac{1}{2} h^{il} (f_{jl} A_k + f_{kl} A_j) $$

この２つが一致するためには、

$$ {}^{y}\Gamma^{i}_{jk} = {}^{G}\Gamma^{i}_{jk} - (\delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j - G^{il} A_l G_{jk}) \quad (5) $$

であればよいことがわかる。

最後に、(5) を用いて ${}^{w}\Gamma^{0}_{jk}$ と ${}^{U}\Gamma^{0}_{jk}$ が、一致することを確かめる。(3) より、

$$ {}^{w}\Gamma^{0}_{jk} = {}^{h}\Gamma^{0}_{jk} - h^{0l}(A_j g_{kl} + A_k g_{jl}) + A^0 g_{jk} $$

$$ = \frac{1}{2}({}^{G}\nabla_j A_k + {}^{G}\nabla_k A_j) - \frac{1}{2} A_p g^{pl} (f_{jl} A_k + f_{kl} A_j) - h^{00} g_{jk} + 2A_j A_k + g_{jk} $$

もう一方は(4) より、

$$ {}^{U}\Gamma^{0}_{jk} = \frac{1}{2}({}^{y}\nabla_j A_k + {}^{y}\nabla_k A_j) + \frac{1}{2} h^{0l} (f_{jl} A_k + f_{kl} A_j) $$

ここで命題 3.3.1 を用いると、

$$ {}^{U}\Gamma^{0}_{jk} = \frac{1}{2}({}^{G}\nabla_j A_k + {}^{G}\nabla_k A_j) + 2A_j A_k - (G^{pr} A_p A_r) G_{jk} + \frac{1}{2} h^{0l} (f_{jl} A_k + f_{kl} A_j) $$

これによって、２つは一致することがわかる。

命題 3.3.1 もし、

$$ {}^{y}\Gamma^{i}_{jk} = {}^{G}\Gamma^{i}_{jk} - (\delta^{i}_{j}A_k + \delta^{i}_{k}A_j - G^{il}A_l G_{jk}) \quad (1) $$

が成り立つならば、

$$ {}^{y}\nabla_j A_k = {}^{G}\nabla_j A_k + 2A_j A_k - (G^{pr}A_p A_r)G_{jk} $$

となる。また、これより

$$ \frac{1}{2}({}^{y}\nabla_j A_k + {}^{y}\nabla_k A_j) = \frac{1}{2}({}^{G}\nabla_j A_k + {}^{G}\nabla_k A_j) + 2A_j A_k - (G^{pr}A_p A_r)G_{jk} $$

（証明） ${}^{y}\nabla_j A_k$ を式 (1) を用いて計算すると、

$$ {}^{y}\nabla_j A_k = \partial_j A_k - A_l\, {}^{y}\Gamma^{l}_{jk} $$

$$ = \partial_j A_k - A_l({}^{G}\Gamma^{l}_{jk} - \delta^{l}_{j}A_k - \delta^{l}_{k}A_j + G^{li}A_i G_{jk}) $$

$$ = {}^{G}\nabla_j A_k + 2A_j A_k - (G^{il}A_i A_l)G_{jk} $$

（終）

§３．４ ${}^{y}\Gamma^{i}_{jk}$ と ${}^{w}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ に関する命題

ここからは§３．３ で得られた、

$$ {}^{y}\Gamma^{i}_{jk} = {}^{G}\Gamma^{i}_{jk} - (\delta^{i}_{j}A_k + \delta^{i}_{k}A_j - G^{il}A_l G_{jk}) $$

$$ {}^{w}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h^{\lambda\alpha}(f_{\mu\alpha}A_\nu + f_{\nu\alpha}A_\mu) $$

を自由に用いる。

命題 3.4.1

$$ {}^{y}\nabla_k G_{ij} = 2A_k G_{ij} $$

（証明） 定義より、

$$ {}^{y}\nabla_k G_{ij} = \partial_k G_{ij} - {}^{y}\Gamma^{l}_{ki}G_{lj} - {}^{y}\Gamma^{l}_{kj}G_{li} $$

であるが、等式 (1) より

$$ {}^{y}\nabla_k G_{ij} = {}^{G}\nabla_k G_{ij} + (\delta^{l}_{k}A_i + \delta^{l}_{i}A_k - G^{lp}A_p G_{ki})G_{lj} $$

$$+(\delta^l_k A_j + \delta^l_j A_k - G^{lp} A_p G_{kj}) G_{li}$$

ここで、 ${}^G\nabla_k G_{ij} = 0$ であるから、

$$= (G_{kj} A_i + G_{ij} A_k - A_j G_{ki}) + (G_{ki} A_j + G_{ji} A_k - A_i G_{kj})$$

$$= 2G_{ij} A_k$$

(終)

命題 3.4.2

$${}^y\nabla_k G^{ij} = -2A_k G^{ij}$$

(証明)

$$0 = {}^G\nabla_l G^{ij} = \partial_l G^{ij} + {}^G\Gamma^i_{lk} G^{jk} + {}^G\Gamma^j_{lk} G^{ik}$$

に対して、

$${}^G\Gamma^i_{jk} = {}^y\Gamma^i_{jk} + (\delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j - G^{il} A_l G_{jk})$$

を使用すれば、

$${}^G\Gamma^i_{lk} G^{jk} = {}^y\Gamma^i_{lk} G^{jk} + (\delta^i_l A_k + \delta^i_k A_l - G^{ir} A_r G_{lk}) G^{jk}$$

$$= {}^y\Gamma^i_{lk} G^{jk} + \delta^i_l A_k G^{jk} + A_l G^{ij} - \delta^j_l G^{ir} A_r$$

同様にして、

$${}^G\Gamma^j_{lk} G^{ik} = {}^y\Gamma^j_{lk} G^{ik} + \delta^j_l A_k G^{ik} + A_l G^{ij} - \delta^i_l G^{jr} A_r$$

これらより結果を得る。(終)

命題 3.4.3 λ を (x^i) 上のスカラーとするとき、ゲージ変換 $G_{ij} \to \lambda G_{ij}$ によって、 ${}^y\Gamma^i_{jk}$ の値は変化しない。

(証明) §2．3に述べたように、ゲージ変換 $G_{ij} \to \lambda G_{ij}$ によって、

$$A_i \to A_i + \partial_i \eta \quad , \quad \eta = \log\sqrt{\lambda}$$

となる。 ${}^G\bar{\Gamma}^i_{jk}$ を λG_{ij} の $Christoffel$ の記号とすれば、命題 1.7.3 によって、

$${}^G\bar{\Gamma}^i_{jk} = {}^G\Gamma^i_{jk} + (\delta^i_j C_k + \delta^i_k C_j - G^{il} C_l G_{jk}) \quad , \quad C_i = \partial_i \eta$$

となる。新しい ${}^{y}\bar{\Gamma}^{i}_{jk}$ は、

$${}^{y}\bar{\Gamma}^{i}_{jk} = {}^{G}\bar{\Gamma}^{i}_{jk} - \{\delta^{i}_{j}(A_k + \partial_k \eta) + \delta^{i}_{k}(A_j + \partial_j \eta) - G^{il}(A_l + \partial_l \eta) G_{jk}\}$$

$$= {}^{G}\Gamma^{i}_{jk} + (\delta^{i}_{j} C_k + \delta^{i}_{k} C_j - G^{il} C_l G_{jk})$$

$$-\{\delta^{i}_{j}(A_k + \partial_k \eta) + \delta^{i}_{k}(A_j + \partial_j \eta) - G^{il}(A_l + \partial_l \eta) G_{jk}\}$$

$$= {}^{y}\Gamma^{i}_{jk}$$

（終）

命題 3.4.4 ある領域で ${}^{y}\Gamma^{i}_{jk} = 0$ ならば、その領域で $f_{ij} = 0$ である。

A_i を電磁気のベクトルポテンシャルと考えるなら、 f_{ij} は電磁場を表すテンソルになる。この命題は、 ${}^{y}\Gamma^{i}_{jk} = 0$ のときは、電磁場が存在しないということをいっている。

（証明） 命題 3.4.1 によれば、${}^{y}\nabla_k G_{ij} = 2A_k G_{ij}$ であるが、${}^{y}\Gamma^{i}_{jk} = 0$ であるから、

$$\partial_k G_{ij} = 2A_k G_{ij}$$

これを微分すれば、

$$\partial_l \partial_k G_{ij} = 2(\partial_l A_k) G_{ij} + 2A_k \partial_l G_{ij} \quad (1)$$

$$\partial_k \partial_l G_{ij} = 2(\partial_k A_l) G_{ij} + 2A_l \partial_k G_{ij} \quad (2)$$

$$0 = (1) - (2) = 2f_{lk} G_{ij} + 2A_k \partial_l G_{ij} - 2A_l \partial_k G_{ij}$$

$\partial_k G_{ij} = 2A_k G_{ij}$ を考慮すれば、 $0 = 2f_{lk} G_{ij}$ 。これより $f_{lk} = 0$ を得る。（終）

命題 3.4.5 至る所で ${}^{y}\Gamma^{i}_{jk} = 0$ ならば、あるゲージ変換を行って、$\bar{G}_{ij} =$ 定数 , $\bar{A}_i = 0$ とすることができる。さらに、ある座標変換 $(x^i) \to (\bar{x}^i)$ を行えば、 $\bar{G}_{ij} = B_{ij}$ とできる。

（証明） 命題 3.4.4 より至る所で ${}^{y}\Gamma^{i}_{jk} = 0$ ならば、至る所で $f_{ij} = 0$ である。従って、あるスカラー η があって、 $A_i = \partial_i \eta$ とすることができる。この η により $\lambda = \exp(-2\eta)$ とし、ゲージ変換 $G_{ij} \to \bar{G}_{ij} = \lambda G_{ij}$ を行うと、

$$\bar{A}_i = A_i - \partial_i \eta = 0$$

命題 3.4.3 より、ゲージ変換を行っても ${}^{y}\Gamma^i_{jk}$ は変わらないから、それは $=0$ のままである、よって ${}^{G}\bar{\Gamma}^i_{jk}$ を $\bar{G}_{ij}=\lambda G_{ij}$ の $Christoffel$ の記号とすれば、

$$ {}^{G}\bar{\Gamma}^i_{jk}-(\delta^i_j\bar{A}_k+\delta^i_k\bar{A}_j-G^{il}\bar{A}_lG_{jk})=0 $$

この式で $\bar{A}_i=0$ だから ${}^{G}\bar{\Gamma}^i_{jk}=0$ を得る。命題 1.7.4 を使えば、

$$ \partial_k\bar{G}_{ij}=\bar{G}_{il}\ {}^{G}\bar{\Gamma}^l_{jk}+\bar{G}_{jl}\ {}^{G}\bar{\Gamma}^l_{ik}=0 $$

これより $\bar{G}_{ij}=$ 定数 を得る。

さらに、光錐面に対する条件から、ある正則な行列 S^i_j によって、

$$ S^k_iS^l_j\bar{G}_{kl}=B_{ij} $$

とできる。ここで $\bar{G}_{ij}$ が定数であることから S^i_j も定数である。座標変換を $S^k_l\bar{x}^l=x^k$ とすれば、

$$ \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}=S^k_i $$

より、

$$ B_{ij}=\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}\bar{G}_{kl} $$

となる。（終）

命題 3.4.6

$$ {}^{w}\nabla_\lambda A_\mu={}^{u}\nabla_\lambda A_\mu=\frac{1}{2}f_{\lambda\mu} $$

が成り立つ。

（証明）

$$ {}^{w}\nabla_\lambda A_\mu=\partial_\lambda A_\mu-A_\alpha\ {}^{w}\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} $$

この右辺の第２項は、

$$ -A_\alpha\ {}^{w}\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}=-A_\alpha\ {}^{u}\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}-A_\alpha\frac{1}{2}h^{\alpha\gamma}(f_{\lambda\gamma}A_\mu+f_{\mu\gamma}A_\lambda) $$

であるが、この右辺の第２項で、

$$ A_\alpha h^{\alpha\gamma}f_{\lambda\gamma}=0\ ,\ A_\alpha h^{\alpha\gamma}f_{\mu\gamma}=0 $$

である。従って、

$$ {}^{w}\nabla_\lambda A_\mu={}^{u}\nabla_\lambda A_\mu $$

が得られる。一方、命題 2.6.1 より、

$$ {}^{u}\nabla_\lambda A_\mu = \frac{1}{2} f_{\lambda\mu} $$

である。（終）

命題 3.4.7 至る所 ${}^{y}\Gamma^i_{jk} = 0$ ならば、 ${}^{w}\Gamma^i_{jk} = 0$ かつ ${}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu 0} = 0$ である。

残りの ${}^{w}\Gamma^0_{jk}$ は、予め、あるゲージ変換を行っておけば、 ${}^{w}\Gamma^0_{jk} = 0$ とできる。

（証明） 命題 3.4.4 より、至る所 ${}^{y}\Gamma^i_{jk} = 0$ ならば、 $f_{jk} = 0$ である。すでに得られた関係式

$$ {}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha} (f_{\mu\alpha} A_\nu + f_{\nu\alpha} A_\mu) $$

より ${}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 。これより ${}^{w}\Gamma^i_{jk} = {}^{y}\Gamma^i_{jk} = 0$ 。また、${}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu 0} = {}^{u}\Gamma^\lambda_{\mu 0} = 0$ 。

一方、

$$ {}^{w}\Gamma^0_{jk} = {}^{u}\Gamma^0_{jk} = \frac{1}{2} ({}^{y}\nabla_j A_k + {}^{y}\nabla_k A_j) $$

であるが、命題 3.4.5 より、至る所 ${}^{y}\Gamma^i_{jk} = 0$ ならば、あるゲージ変換を行って $\bar{A}_i = 0$ とできる。命題 3.4.3 によれば、ゲージ変換によって ${}^{y}\Gamma^i_{jk}$ は変化しない。従って、予め、このゲージ変換を行っておくことで、${}^{w}\Gamma^0_{jk}$ は 0 にできる。

（注意）ここでは、ゲージ変換によって ${}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の形が変化しないのだろうか、という問題が見え隠れしているが、これは第８章でまとめて扱うことにする。（終）

命題 3.4.8 至る所 ${}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$ ならば、 ${}^{y}\Gamma^i_{jk} = 0$ である。

（証明） 等式

$$ {}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha} (f_{\mu\alpha} A_\nu + f_{\nu\alpha} A_\mu) $$

より、

$$ {}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu 0} = \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha} f_{\mu\alpha} = 0 $$

これより $f_{jk} = 0$ が得られる。従って、再び前式より

$$ {}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 $$

（終）

§３．５　５次元から見た ${}^{y}\Gamma^i_{jk}$

時空理論の出発点となった４次元各点座標 (y^i) は、もしかして、５次元各点座標 (w^λ) のどこかに、潜んでいるのではないだろうか。ここでは (w^λ) の中に (y^i) を探し出してみよう。ここで (w^λ) の基底は§３．１ のようにとっておくものとする。

まずは、命題 3.5.1 を見てもらいたい。命題 3.5.1 において、 (p^λ) として (w^λ) を与えれば、

$$ {}^{z}\Gamma^i_{jk} = {}^{w}\Gamma^i_{jk} - {}^{w}\Gamma^i_{j0}B_k - {}^{w}\Gamma^i_{0k}B_j + {}^{w}\Gamma^i_{00}B_jB_k $$

が成り立つ。ここで B_λ については $A_\lambda = B_\lambda$ となる。なぜならば、

$$ w^0(f(x^1,...,x^4),x^1,...,x^4) = 0 $$

が恒等的に成り立つから、これより、

$$ \frac{\partial w^0}{\partial x^0}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial w^0}{\partial x^i} = 0 \quad (1) $$

ここで§３．１ より、

$$ \frac{\partial w^0}{\partial x^0} = 1 \ \ , \ \ \frac{\partial w^0}{\partial x^i} = A_i $$

であるから (1) は $A_i = -\partial_i f$ 、すなわち $A_i = B_i$ である。こうして、

$$ {}^{z}\Gamma^i_{jk} = {}^{w}\Gamma^i_{jk} - {}^{w}\Gamma^i_{j0}A_k - {}^{w}\Gamma^i_{0k}A_j + {}^{w}\Gamma^i_{00}A_jA_k \quad (2) $$

が得られた。ところで、

$$ {}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{1}{2}h^{\lambda\alpha}(f_{\mu\alpha}A_\nu + f_{\nu\alpha}A_\mu) $$

であるから、命題 3.5.2 で U として w を与えれば、

$$ {}^{u}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = {}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - {}^{w}\Gamma^\lambda_{\mu 0}A_\nu - {}^{w}\Gamma^\lambda_{0\nu}A_\mu + {}^{w}\Gamma^\lambda_{00}A_\mu A_\nu $$

これと (2) を比較して、

$$ {}^{z}\Gamma^i_{jk} = {}^{u}\Gamma^i_{jk} = {}^{y}\Gamma^i_{jk} $$

を得る。

命題 3.5.1　５次元時空 (x^λ) 上の点 P に、５次元各点座標 (p^λ) が与えられていて、(p^λ) の基底は§３．１ のようにとってあるものとする。点 P の近傍で、 $p^0(x^0,...,x^4) = 0$ を満たす (x^λ) は小さな４次元曲面となる。

$p^0(x^0,...,x^4)=0$ を x^0 について解いて、 $x^0=f(x^1,...,x^4)$ とする。関数 $z^\alpha()$ を、

$$z^\alpha(x^1,...,x^4)=p^\alpha(f(x^1,...,x^4),x^1,...,x^4) \quad (1)$$

と定義する。定義より $z^0(x^1,...,x^4)=0$ である。ここで (p^λ) に対する条件として、関数 $z^i()$ は逆関数 $x^i(z^1,...,z^4)$ を持つ、とする。

この前提の元で、次の関係式が成り立つ。

$${}^z\Gamma^i_{jk}= {}^p\Gamma^i_{jk}- {}^p\Gamma^i_{j0}B_k- {}^p\Gamma^i_{0k}B_j+ {}^p\Gamma^i_{00}B_jB_k$$

ここで

$${}^p\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial p^\alpha}\frac{\partial^2 p^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu} \quad , \quad {}^z\Gamma^i_{jk}=\frac{\partial x^i}{\partial z^l}\frac{\partial^2 z^l}{\partial x^j\partial x^k}$$

また、 B_λ は点 P から生えるベクトルで、

$$B_0=1 \quad , \quad B_i=-\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

とする。

（証明）

まず、簡単な計算によって

$$\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^j\partial x^k}=\frac{\partial^2 p^\alpha}{\partial x^j\partial x^k}+\frac{\partial^2 p^\alpha}{\partial x^0\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}+\frac{\partial^2 p^\alpha}{\partial x^0\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial x^j}$$

$$+\frac{\partial^2 p^\alpha}{\partial x^0\partial x^0}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}+\frac{\partial p^\alpha}{\partial x^0}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k} \quad (2)$$

であることがわかる。一方、

$$\frac{\partial^2 p^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}=\frac{\partial p^\alpha}{\partial x^\lambda}\ {}^p\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$$

である。これらによって式 (2) を書き換えると、点 P において、

$$\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^j\partial x^k}=\frac{\partial p^\alpha}{\partial x^\lambda}({}^p\Gamma^\lambda_{jk}- {}^p\Gamma^\lambda_{j0}B_k- {}^p\Gamma^\lambda_{0k}B_j+ {}^p\Gamma^\lambda_{00}B_jB_k)+\frac{\partial p^\alpha}{\partial x^0}\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k}$$

となる。これへ $\partial x^\mu/\partial p^\alpha$ をほどこすと、

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial p^\alpha}\frac{\partial^2 z^\alpha}{\partial x^j\partial x^k}=({}^p\Gamma^\mu_{jk}- {}^p\Gamma^\mu_{j0}B_k- {}^p\Gamma^\mu_{0k}B_j+ {}^p\Gamma^\mu_{00}B_jB_k)+\delta^\mu_0\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k}$$

となる。

$z^0=0$ であったから、これより

$$\frac{\partial^2 z^0}{\partial x^j\partial x^k}=0 \quad (3)$$

次に、

$$\frac{\partial x^k}{\partial z^n} = \frac{\partial x^k}{\partial p^n} \quad (4)$$

を示してみよう。これが以外にめんどうである。まず (1) より、

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = \frac{\partial p^i}{\partial x^0}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \frac{\partial p^i}{\partial x^j}$$

ここで、 $\partial p^i/\partial x^0$ は§3．1のように基底をとってあるから、 0 である。よって、

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = \frac{\partial p^i}{\partial x^j} \quad (5)$$

次に前提条件より、

$$\delta^k_j = \frac{\partial z^l}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial z^l} \quad (6)$$

次に、

$$\delta^k_j = \frac{\partial p^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial p^\alpha} = \frac{\partial p^l}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial p^l} \quad (7)$$

ここで、§3．1 よりの $\partial x^k/\partial p^0 = 0$ を用いた。(6) へ (5) を使用して、

$$\delta^k_j = \frac{\partial p^l}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial z^l}$$

この両辺へ $\partial x^j/\partial p^n$ をほどこして、

$$\frac{\partial x^k}{\partial p^n} = \frac{\partial x^j}{\partial p^n}\frac{\partial p^l}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial z^l} \quad (8)$$

この右辺について、

$$\frac{\partial x^j}{\partial p^n}\frac{\partial p^l}{\partial x^j} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial p^n}\frac{\partial p^l}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial x^0}{\partial p^n}\frac{\partial p^l}{\partial x^0} = \delta^l_n$$

ここで、§3．1 よりの $\partial p^l/\partial x^0 = 0$ を用いた。 (8) より、

$$\frac{\partial x^k}{\partial p^n} = \frac{\partial x^k}{\partial z^n}$$

を得る。

(3) と (4) より、

$$\frac{\partial x^i}{\partial z^l}\frac{\partial^2 z^l}{\partial x^j \partial x^k} = {}^p\Gamma^i_{jk} - {}^p\Gamma^i_{j0}B_k - {}^p\Gamma^i_{0k}B_j + {}^p\Gamma^i_{00}B_jB_k$$

が得られた。（終）

命題 3.5.2 §２．７で定義したところの、

$$ {}^{U}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + (K^{\lambda}_{\mu} A_{\nu} + K^{\lambda}_{\nu} A_{\mu}) \quad (1) $$

について、等式

$$ {}^{u}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = {}^{U}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - {}^{U}\Gamma^{\lambda}_{\mu 0} A_{\nu} - {}^{U}\Gamma^{\lambda}_{0\nu} A_{\mu} + {}^{U}\Gamma^{\lambda}_{00} A_{\mu} A_{\nu} $$

が成り立つ。

（証明）　式 (1) より

$$ {}^{U}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + (K^{\lambda}_{\mu} A_{\nu} + K^{\lambda}_{\nu} A_{\mu}) $$

$$ - {}^{U}\Gamma^{\lambda}_{\mu 0} A_{\nu} = -(K^{\lambda}_{\mu} + K^{\lambda}_{0} A_{\mu}) A_{\nu} $$

$$ - {}^{U}\Gamma^{\lambda}_{0\nu} A_{\mu} = -(K^{\lambda}_{0} A_{\nu} + K^{\lambda}_{\nu}) A_{\mu} $$

$$ {}^{U}\Gamma^{\lambda}_{00} A_{\mu} A_{\nu} = (K^{\lambda}_{0} + K^{\lambda}_{0}) A_{\mu} A_{\nu} $$

これらを足し合わせることで、結果を得る。（終）

命題 3.5.3 ５次元時空 (x^{λ}) 内の４次元曲面

$$ x^0 = f(x^1, ..., x^4) $$

を考える。この面上の点 P から生えるベクトル B_{λ} を、

$$ B_0 = 1 \quad , \quad B_i = -\partial_i f $$

と定義すると、点 P から生え、この４次元面に接する微小ベクトル

$$ dx^{\lambda} = (\partial_i f dx^i, dx^1, dx^2, dx^3, dx^4) $$

に対して、 $B_{\lambda} dx^{\lambda} = 0$ である。なぜならば、

$$ B_{\lambda} dx^{\lambda} = dx^0 + B_i dx^i = \partial_i f dx^i - \partial_i f dx^i = 0 $$

（終）

時空理論　第３章
2009年7月　 Ver1.0　 発行
著者：渡辺 満 , 発行者：渡辺 満