第 1 章　数学的な準備

この章では、一般的に N次元空間 $\Omega_N(=R^N)$ を扱うので、この章に限り特にことわらない限り、添字 $i,j,k,l,m,n,...$ は $1,2,...,N$ の値を指すものとする。また、本書全体を通じて N次元空間 Ω_N の座標 $(x^1,x^2,...,x^N)$ を (x^i) と略記する。また、 δ^i_j,δ_{ij} を $Kronecker$ のデルタとする。

§1．1　テンソル

テンソルについては、詳しく知っている必要はないが、定義は知らなくてはならない。ここでの定義は、この章の末尾：参考文献「幾何学概論」に従った。

(m,n) 次テンソル $(m,n\geq 0)$ について例を上げながら説明する。N 次元空間 Ω_N 上に定義された N^5 個の関数 T^{ij}_{klm} が $(2,3)$ 次テンソルであるとは、座標変換 $(x^i)\rightarrow(\bar{x}^i)$ によって T^{ij}_{klm} が、

$$\bar{T}^{op}_{qrs}=\frac{\partial\bar{x}^o}{\partial x^i}\frac{\partial\bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^q}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^r}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^s}T^{ij}_{klm}$$

と変換されるときにいう。ここで、 $\bar{T}^{op}_{qrs}$ は座標 $(\bar{x}^i)$ における T^{op}_{qrs} のことである。

共変ベクトル A_i は、

$$\bar{A}_i=\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}A_j$$

と変換されるので $(0,1)$ 次テンソルである。また、反変ベクトル A^i は

$$\bar{A}^i=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j}A^j$$

と変換されるので $(1,0)$ 次テンソルである。

$g_{ij}=g_{ji}$, $g^{ij}=g^{ji}$ となるテンソルを対象テンソル、$f_{ij}=-f_{ji}$, $f^{ij}=-f^{ji}$ となるテンソルを交代テンソルと呼ぶ。対象テンソル，交代テンソルという各性質は座標変換 $(x^i)\rightarrow(\bar{x}^i)$ によって保存される。それは

$$\bar{h}_{ij}=\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}h_{kl}=\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}h_{lk}=\bar{h}_{ji}$$

等によってわかる。

計量 g_{ij} は $(0,2)$ 次テンソルである。なぜならば、

$$ds^2=g_{ij}dx^idx^j$$

において、

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} d\bar{x}^k$$

を右辺に代入すると、

$$ds^2 = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} d\bar{x}^k d\bar{x}^l$$

これより $(\bar{x}^i)$ での計量 $\bar{g}_{ij}$ は、

$$\bar{g}_{kl} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l}$$

であることがわかる。

　また、 g_{ij} の逆行列 g^{ij} は対象行列であるが、これは $(2,0)$ 次テンソルである。なぜならば、

$$\bar{g}^{ik} \bar{g}_{kj} = \delta^i_j$$

より、

$$\bar{g}^{ik} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} g_{lm} = \delta^i_j$$

となるが、この両辺に

$$\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} g^{np} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^p}$$

をほどこすと、

$$\bar{g}^{ir} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^p} g^{np}$$

となる。

§１．２　各点座標と接続係数

　N次元空間 Ω_N の点Ｐに対して、Ｐのある近傍 U_P をとり、この U_P 上にN次元座標 (z^i) を、その原点がＰに一致するように与える。このような (z^i) を、 (x^i) の各点に与えたとき、これを各点座標 (z^i) と名付ける。 U_P は次の ${}^z\Gamma^i_{jk}$ が定義できればよいので、どんなに小さな近傍でもよい。

　N次元空間 Ω_N 上に、各点座標 (z^i) が与えられているとき、各点Ｐに対して、 ${}^z\Gamma^i_{jk}$ を

$${}^z\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial z^l} \frac{\partial^2 z^l}{\partial x^j \partial x^k}$$

と定義して、これを各点座標 (z^i) による接続係数と呼ぶ。

　座標変換 $(x^i) \to (\bar{x}^i)$ によって ${}^z\Gamma^i_{jk}$ は次のように変換される。確認は§１．８の公式(6)を用いて行うことができる。

$${}^z\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\, {}^z\Gamma^l_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

この変換式は、$Riemann$ 空間論における $Christoffel$ の記号の変換式と同じ形である。

(z^i) の代わりに、これを１次変換した $(\bar{z}^i)$ を各点座標として考えてみる。ある T^i_j によって、

$$\bar{z}^i = T^i_j z^j \ , \ z^i = S^i_j \bar{z}^j$$

ここで、 S^i_j を T^i_j の逆行列 $S^i_k T^k_j = \delta^i_j$ とした。$(\bar{z}^i)$ による接続係数は、

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar{z}^l}\frac{\partial^2 \bar{z}^l}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial z^m}{\partial \bar{z}^l}\frac{\partial^2 (T^l_n z^n)}{\partial x^j \partial x^k}$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial z^m} S^m_l T^l_n \frac{\partial^2 z^n}{\partial x^j \partial x^k} = \ {}^z\Gamma^i_{jk}$$

となる。すなわち接続係数は (z^i) を１次変換しても変わらない。

いま、点 P に $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ なる任意の３つの数の組 Γ^i_{jk} が与えられたとする。これを接続係数にするような点 P の各点座標 (z^i) は、例えば、次のようにして作ることができる。適当な正則行列 T^i_l をとって、

$$z^i = T^i_l(x^l - P^l) + \frac{1}{2}T^i_l \Gamma^l_{jk}(x^j - P^j)(x^k - P^k)$$

とする。 U_P は $(x^i) \to (z^i)$ が１対１になるように十分小さくとる。 T^i_l や Γ^i_{jk} は U_P 上では定数と考える。 T^i_j は $\partial z^i/\partial x^j$ を決めるために必要である。

N次元空間 Ω_N 上に、計量 g_{ij} が与えられているときには、$Christoffel$ の記号を考えることができる。それを ${}^g\Gamma^i_{jk}$ で表す。 (z^i) を計量 g_{ij} による点Pの測地座標とすれば、 (z^i) は点Pのひとつの各点座標とみなすことができる。 ${}^g\Gamma^i_{jk}$ を座標変換 $(x^i) \to (z^i)$ すると、(z^i) 上では ${}^g\bar{\Gamma}^i_{jk} = 0$ であるから、

$${}^g\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial z^i}{\partial x^l}\ {}^g\Gamma^l_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial z^j}\frac{\partial x^n}{\partial z^k} + \frac{\partial z^i}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial z^j \partial z^k} = 0$$

これより

$${}^g\Gamma^l_{mn} = -\frac{\partial^2 x^l}{\partial z^j \partial z^k}\frac{\partial z^j}{\partial x^m}\frac{\partial z^k}{\partial x^n}$$

これは§１．８の公式(５)より、

$$= \frac{\partial x^l}{\partial z^p}\frac{\partial^2 z^p}{\partial x^m \partial x^n}$$

すなわち、 ${}^g\Gamma^i_{jk}$ は各点座標 (z^i) による接続係数 ${}^z\Gamma^i_{jk}$ に一致する。

§1．3　共変微分

ここでは、共変微分の定義を前述の各点座標を用いて行う。この方法は特殊であるかもしれないが、我々の目的にとっては非常に効果的であり、また物理学として自然である。

E_i を Ω_N 上の共変ベクトルとするとき、 E_i の点Pの各点座標 (z^i) 上での表現を $\bar{E}_i$ とする。すなわち、

$$\bar{E}_i = \frac{\partial x^j}{\partial z^i} E_j$$

とする。$\partial \bar{E}_i / \partial z^j$ を (z^i) の原点で考えると、等式

$$\frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial z^l}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{E}_k}{\partial z^l} = \frac{\partial E_i}{\partial x^j} - {}^z\Gamma^l_{ij} E_l$$

が成り立つ。この左辺または右辺を ${}^z\nabla_j E_i$ と書いて E_i の、接続係数 ${}^z\Gamma^l_{ij}$ による共変微分と呼ぶ。${}^z\nabla_j E_i$ は $\partial \bar{E}_k / \partial z^l$ を (x^i) 上へ落としたもの、という風に表現することができる。 ${}^z\nabla_j E_i$ は $(0,2)$ 次テンソルであることを、確かめることができる。

同様に、反変ベクトル F^i について等式

$$\frac{\partial z^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial z^l} \frac{\partial \bar{F}^l}{\partial z^k} = \frac{\partial F^i}{\partial x^j} + {}^z\Gamma^i_{jl} F^l$$

が成り立つ。この右辺を ${}^z\nabla_j F^i$ と書いて F^i の ${}^z\Gamma^l_{ij}$ による共変微分と呼ぶ。${}^z\nabla_j F^i$ は $\partial \bar{F}^l / \partial z^k$ を (x^i) 上へ落としたもの、という風に表現することができる。これは $(1,1)$ 次テンソルであることを、確かめることができる。

同様に、一般的なテンソルについても、 (z^i) 上の偏微分を (x^i) 上へ落とすことにより、共変微分を定義することができる。後で必要となるテンソルについて、その共変微分を下記に列挙する。

ここで f はスカラー、g_{ij} は $(0,2)$ 次、 H^{ij} は $(2,0)$ 次の各テンソルとする。

$$ {}^z\nabla_i f = \partial_i f$$

$$ {}^z\nabla_j E_i = \partial_j E_i - {}^z\Gamma^l_{ji} E_l$$

$$ {}^z\nabla_j F^i = \partial_j F^i + {}^z\Gamma^i_{jl} F^l$$

$$ {}^z\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - {}^z\Gamma^p_{ki} g_{pj} - {}^z\Gamma^p_{kj} g_{ip}$$

$$ {}^z\nabla_k H^{ij} = \partial_k H^{ij} + {}^z\Gamma^i_{kp} H^{pj} + {}^z\Gamma^j_{kp} H^{ip}$$

これらは上から $(0,1)$ 次 , $(0,2)$ 次 , $(1,1)$ 次 , $(0,3)$ 次 , $(2,1)$ 次テンソルとなる。

共変微分に対して、次のような等式が成り立つ。ここでは、例を上げるのみであるが、これらは一般化できる。

$$^{z}\nabla_k(A_i+B_i)= {}^{z}\nabla_k A_i + {}^{z}\nabla_k B_i$$

$$^{z}\nabla_k(g_{ij}v^j v^j)=({}^{z}\nabla_k g_{ij})v^i v^j + g_{ij}({}^{z}\nabla_k v^i)v^j + g_{ij}v^i({}^{z}\nabla_k v^j)$$

$$^{z}\nabla_k(fE_{ij})=({}^{z}\nabla_k f)E_{ij} + f({}^{z}\nabla_k E_{ij})$$

$$^{z}\nabla_k(g^{ij}A_j)=({}^{z}\nabla_k g^{ij})A_j + g^{ij}({}^{z}\nabla_k A_j)$$

§１．４　方程式 $^{z}[x^i/t]=0$ について

N次元空間 Ω_N 上に、接続係数 $^{z}\Gamma^i_{jk}$ が与えられているとき、記号 $^{z}[x^i/t]$ を次式の意味とする。

$$^{z}[x^i/t]=\frac{dv^i}{dt}+ {}^{z}\Gamma^i_{jk}v^j v^k$$

ここで、 $v^i=dx^i/dt$ とする。

方程式 $^{z}[x^i/t]=0$ の解である曲線 $x^i(t)$ について考える。パラメータ t を別のパラメータ s に変換すると、 $x^i(s)$ は $^{z}[x^i/s]=0$ を満たすとは限らない。従って、パラメータ t はこの方程式にとって特別なパラメータである。定数 c によって $s=ct$ とすると、 $x^i(s)$ もこの方程式を満たす。逆に、あるパラメータ s による $x^i(s)$ がこの方程式を満たすならば、定数 c があって $s=ct$ と書けることは、次のようにしてわかる。$^{z}[x^i/s]=0$ のパラメータを t に変換すると、$v^i=dx^i/dt$ とすれば、 §１．８の公式 (8) により、

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 {}^{z}[x^i/t]+\frac{d^2t}{ds^2}v^i=0$$

となるが、これより $d^2t/ds^2=0$ が得られ、$s=ct$ と書けることがわかる。パラメータ s と t が定数 c によって $s=ct$ と書けるとき、 s と t は同期していると呼ぶ。

v^i は $x^i(t)$ 上のみに存在するベクトルであるが、一端 $x^i(t)$ が与えられた後であれば、必要に応じて $x^i(t)$ の周りにも仮想的に存在すると考えることで、次のような表現が可能になる。

$$^{z}[x^i/t]=\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k}+ {}^{z}\Gamma^i_{jk}v^j\right)v^k=({}^{z}\nabla_k v^i)v^k$$

このように表現すると、計算が簡単になる場合がある。

命題 1.4.1　N次元空間 Ω_N 上に、接続係数 ${}^z\Gamma^i_{jk}$ と計量 g_{ij} が与えられているとする。$x^i(t)$ を方程式 ${}^z[x^i/t]=0$ を満たす曲線とし、パラメータ s をこの $x^i(t)$ の g_{ij} による弧長とするとき、t と s の間に次の関係が成り立つ。 $V^i=dx^i/ds$ とするとき、

$$\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{1}{2}({}^z\nabla_k g_{ij})V^iV^jV^k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=0 \quad (1)$$

また、これを書き換えた、

$$\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{1}{2}({}^z\nabla_k g_{ij})V^iV^jV^k\frac{dt}{ds}=0 \quad (2)$$

が成り立つ。

（証明）　§１．８の公式 (8) を使って、 ${}^z[x^i/t]=0$ の t を s に変換すると、

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\ {}^z[x^i/s]+\frac{d^2s}{dt^2}V^i=0$$

となるが、これに $g_{ij}V^j$ をほどこして、

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 g_{ij}\ {}^z[x^i/s]V^j+\frac{d^2s}{dt^2}=0 \quad (3)$$

とする。一方で $g_{ij}V^iV^j=1$ より、

$$0=\ {}^z\nabla_k(g_{ij}V^iV^j)V^k=({}^z\nabla_k g_{ij})V^iV^jV^k+2g_{ij}({}^z\nabla_k V^i)V^kV^j$$

ここで、 $({}^z\nabla_k V^i)V^k=\ {}^z[x^i/s]$ であるから、

$$({}^z\nabla_k g_{ij})V^iV^jV^k=-2g_{ij}\ {}^z[x^i/s]V^j \quad (4)$$

を得る。 (3) と (4) より結果 (1) を得る。結果 (2) については、結果 (1) に§１．８の公式 (4) を使用すれば得られる。（終）

この命題において、各点座標として計量 g_{ij} の測地座標をとれば、接続係数 ${}^z\Gamma^i_{jk}$ は $Christoffel$ の記号 ${}^g\Gamma^i_{jk}$ に一致し、 $Christoffel$ の記号においては ${}^g\nabla_k g_{ij}=0$ であるから $d^2t/ds^2=0$ が得られる。

命題 1.4.2　N次元空間 Ω_N 上に、接続係数 ${}^z\Gamma^i_{jk}$ と計量 g_{ij} が与えられているとする。$x^i(t)$ を方程式 ${}^z[x^i/t]=0$ を満たす曲線とし、パラメータ s をこの $x^i(t)$ の g_{ij} による弧長とする。また、別のパラメータ τ が、

$$\frac{d^2\tau}{ds^2}+\frac{1}{2}({}^z\nabla_k g_{ij})V^iV^jV^k\frac{d\tau}{ds}=0 \quad (1)$$

を満たすとする。このとき、 t と τ の間に

$$\frac{d^2\tau}{dt^2}=0$$

が成り立つ。ここで $V^i=dx^i/ds$ とする。

（証明）

$$\frac{d\tau}{dt}=\frac{d\tau}{ds}\frac{ds}{dt}$$

を d/dt することで、

$$\frac{d^2\tau}{dt^2}=\frac{d^2\tau}{ds^2}\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2+\frac{d\tau}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} \quad (2)$$

が得られる。一方で命題 1.4.1 より、

$$\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{1}{2}({}^z\nabla_k g_{ij})V^iV^jV^k\frac{dt}{ds}=0 \quad (3)$$

が成り立つ。 (1) と (3) により、

$$\frac{ds}{d\tau}\frac{d^2\tau}{ds^2}=\frac{ds}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}$$

が得られ、これより式 (2) の右辺の第１項は、

$$\frac{d^2\tau}{ds^2}\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2=\frac{d\tau}{ds}\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^3\frac{d^2t}{ds^2}$$

また、式 (2) の右辺の第２項は §１．８の公式 (4) によって、

$$\frac{d\tau}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{d\tau}{ds}\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^3\frac{d^2t}{ds^2}$$

これらより結果を得る。（終）

§１．５　接続係数と計量の同期

N次元空間 Ω_N の曲線 $x^i(t)$ 上に、接続係数 ${}^z\Gamma^i_{jk}$ と計量 g_{ij} が与えられているとする。

$x^i(t)$ 上のベクトル $a^i(t)$ や $b_i(t)$ が、 ${}^z\Gamma^i_{jk}$ について平行であるとは、$x^i(t)$ 上で、

$$({}^z\nabla_k a^i)v^k=0\ ,\ ({}^z\nabla_k b_i)v^k=0\ ,\ v^i=\frac{dx^i}{dt}$$

が成り立つことをいう。また、この曲線上の各点で、

$$({}^z\nabla_i g_{jk})v^i=0$$

となっているとき、 ${}^{z}\Gamma^{i}_{jk}$ と g_{ij} は $x^i(t)$ 上で同期している、という。ここで、 ${}^{z}\Gamma^{i}_{jk}$ と g_{ij} は $x^i(t)$ 上のみで与えられている、としているから、 ${}^{z}\nabla_i g_{jk}$ は計算できないが、 $({}^{z}\nabla_i g_{jk})v^i$ のように v^i が付いているので計算が可能である。次のことが成り立つ。

命題 1.5.1 ${}^{z}\Gamma^{i}_{jk}$ と g_{ij} が $x^i(t)$ 上で同期しているとき、$x^i(t)$ 上のベクトル $a^i(t)$ と $b^i(t)$ が ${}^{z}\Gamma^{i}_{jk}$ について平行ならば、

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}a^i b^j) = 0$$

である。

これから、 $x^i(t)$ 上で a^i の大きさ $g_{ij}a^i a^j$ はずっと一定であり、また、 a^i と b^i がある点で g_{ij} に関して直交していれば、ずっと直交していることがわかる。($g_{ij}a^i b^j = 0$ のとき a^i と b^j は g_{ij} に関して直交しているという)

(証明)

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}a^i b^j) = {}^{z}\nabla_k(g_{ij}a^i b^j)v^k$$
$$= ({}^{z}\nabla_k g_{ij})v^k a^i b^j + g_{ij}({}^{z}\nabla_k a^i)v^k b^j + g_{ij}a^i({}^{z}\nabla_k b^j)v^k = 0$$

(終)

命題 1.5.2 ${}^{z}\Gamma^{i}_{jk}$ と g_{ij} が $x^i(t)$ 上で同期しているとき、$x^i(t)$ 上のベクトル $a^i(t)$ が ${}^{z}\Gamma^{i}_{jk}$ について平行ならば、 $a_i = g_{ij}a^i$ とするとき、

$$({}^{z}\nabla_k a_i)v^k = 0$$

が成り立つ。すなわち a_i も平行である。

(証明)

$$({}^{z}\nabla_k a_i)v^k = \{{}^{z}\nabla_k(g_{ij}a^j)\}v^k$$
$$= ({}^{z}\nabla_k g_{ij})v^k a^j + g_{ij}({}^{z}\nabla_k a^j)v^k = 0$$

(終)

§1.6 線状座標

N次元空間 Ω_N 上の曲線 $x^i(t)$ $(c \le t \le d)$ に対して、この曲線の周りに、この曲線に沿った細長い N次元の筒状領域をとり、この領域上に座標 (z^i) が次のように与えられているとする。

(z^i) 上の z^N 軸上の $c \le z^N \le d$ 区間上の点 $(0,...,0,z^N)$ が $x^i(z^N)$ である。

このとき、 (z^i) を曲線 $x^i(t)$ の線状座標と呼ぶ。

命題 1.6.1 N次元空間 Ω_N の曲線 $x^i(t)$ $(c \le t \le d)$ 上に、接続係数 ${}^y\Gamma^i_{jk}$ が与えられている。また、 $x^i(t)$ 上の各点に N 個の１次独立なベクトル $e^i[n]$ が与えられていて、特に

$$e^i[N] = v^i \quad , \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}$$

とする。このとき、 $e^i[n]$ の各々が ${}^y\Gamma^i_{jk}$ に関して平行であるならば、

$$e^i[n] = \frac{\partial x^i}{\partial z^n} \quad (1)$$

$${}^y\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial z^l}\frac{\partial^2 z^l}{\partial x^j \partial x^k} \quad (2)$$

となるような $x^i(t)$ の線状座標 (z^i) が存在する。

また逆に、(2) を満たすような $x^i(t)$ の線状座標 (z^i) が存在したとすると、 (1) によって $e^i[n]$ を定義すると、 $e^i[n]$ は ${}^y\Gamma^i_{jk}$ に関して平行である。

（証明） 最初に前半を証明する。まず、 $x^i(t)$ 上に ${}^y\Gamma^i_{jk}$ を接続係数に持つ各点座標 (y^i) を、例えば ＜§１．２ 各点座標と接続係数＞ で示したような方法で作り、

$$e^i[n] = \frac{\partial x^i}{\partial y^n}$$

となるようにする。

別に、もうひとつ N次元空間 (z^i) を用意しておき、この座標 (z^i) 上の z^N 軸に十分に近い点 P に対して、 P の z^N 座標値を $z^N(P)$ とするとき、まず、 $x^i(t)$ 上の点 $x^i(z^N(P))$ を Q とする。そして、点 Q の各点座標 $(y^i)_Q$ をとる。そして、点 P の $(y^i)_Q$ 座標を

$$y^a = z^a \quad , \quad y^N = 0 \quad (a = 1, 2, ..., N-1)$$

として決める。次に、各点座標 $(y^i)_Q$ と (x^i) との関係から、点 P の (x^i) 座標を決める。このようにして、 z^N 軸のまわりで写像 $(z^i) \to (x^i)$ ができる。

このようにすると、 z^N 軸上の点 P と、それに対応する $(y^i)_Q$ において、

$$\frac{\partial x^i}{\partial z^a} = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \quad (a = 1, 2, ..., N-1)$$

となるが、これはこの写像 $(z^i) \to (x^i)$ の作り方より明らかである。

また、 z^N 軸上の点においては $t = z^N$ であるから、

$$\frac{\partial x^i}{\partial z^N} = \frac{dx^i}{dt} = v^i = e^i[N]$$

これらから、結局 $x^i(t)$ 上で

$$\frac{\partial x^i}{\partial z^j} = e^i[j] = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \quad (3)$$

が成り立つ。

式 (3) より z^N 軸上で、行列 $\partial x^i/\partial z^j$ の行列式は 0 でないことがわかる。従って、 z^N 軸のまわりのある細長い領域でも、行列 $\partial x^i/\partial z^j$ の行列式は 0 でない。従って、この領域で関数 $x^i(z^1, ..., z^N)$ の逆関数 $z^i(x^1, ..., x^N)$ が存在する。

写像 $(z^i) \to (x^i)$ の作り方から、 z^N 軸上の点 P と、それに対応する $(y^i)_Q$ において、

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^b \partial z^a} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^b \partial y^a} \quad (a, b = 1, 2, ..., N-1) \quad (4)$$

さらに、式 (3) を z^N で微分して、

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^N \partial z^j} = \frac{d}{dt} e^i[j] \quad (5)$$

を得る。

さて、これらの準備の元で、z^N 軸上の点 P と、それに対応する $(y^i)_Q$ において、

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^j \partial z^k} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^k}$$

となる必要条件を求めてみよう。式 (4) によって

$$j, k = 1, 2, ..., N-1$$

の場合は、すでに成り立っている。式 (5) を考慮すれば、

$$\frac{d}{dt} e^i[j] - \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^N \partial y^j} = 0 \quad (6)$$

が成り立てばよい。 §1．8の公式 (5) によれば、

$$-\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^k} = {}^y\Gamma^i_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial y^j} \frac{\partial x^q}{\partial y^k}$$

が成り立つから、これを用いて式 (6) を書き換えると、

$$\frac{d}{dt}e^i[j] + {}^y\Gamma^i_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial y^N}e^q[j] = 0 \quad (6.1)$$

となる。これを書き直せば、

$$\frac{d}{dt}e^i[n] + {}^y\Gamma^i_{pq}e^q[n]v^p = 0 \quad (6.2)$$

となる。式 (6.2) はベクトル $e^i[n]$ が、$x^i(t)$ に沿って ${}^y\Gamma^i_{jk}$ に関して平行である条件である。

次に、後半の方を証明する。そのような (z^i) が存在したとすると、(z^i) 上で z^N 軸上のベクトル $\bar{e}^i[n]$ を

$$\bar{e}^i[n] = \frac{\partial z^i}{\partial x^j}e^j[n] = \frac{\partial z^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^n} = \delta^i_n$$

と定義すれば明らかに、

$$\frac{d}{dt}\bar{e}^i[n] = 0$$

である。<§１．３ 共変微分>に従って、

$$\Big(\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^l}\frac{\partial}{\partial z^k}\bar{e}^l[n]\Big)v^j = \Big(\frac{\partial}{\partial x^j}e^i[n] + {}^z\Gamma^i_{jl}e^l[n]\Big)v^j$$

これより、

$$\frac{d}{dt}e^i[n] + {}^z\Gamma^i_{jl}e^l[n]v^j = 0$$

を得る。（終）

§１．７ その他の命題

命題 1.7.1 N次元空間 Ω_N 上に、接続係数 ${}^z\Gamma^i_{jk}$ と計量 g_{ij} が与えられているとする。このとき、${}^z\nabla_k g_{ij} = 0$ ならば接続係数 ${}^z\Gamma^i_{jk}$ は計量 g_{ij} の $Christoffel$ の記号 ${}^g\Gamma^i_{jk}$ に等しい。

（証明） 共変微分の定義より、

$${}^z\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - {}^z\Gamma^l_{ki}g_{lj} - {}^z\Gamma^l_{kj}g_{il} = 0 \quad (1)$$

$${}^z\nabla_i g_{jk} = \partial_i g_{jk} - {}^z\Gamma^l_{ij}g_{lk} - {}^z\Gamma^l_{ik}g_{jl} = 0 \quad (2)$$

$${}^z\nabla_j g_{ki} = \partial_j g_{ki} - {}^z\Gamma^l_{jk}g_{li} - {}^z\Gamma^l_{ji}g_{kl} = 0 \quad (3)$$

これらより、

$$(1) + (2) - (3) = \partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki} - 2\,{}^z\Gamma^l_{ik}g_{lj} = 0$$

これに $g^{mj}/2$ をほどこすと、

$$\frac{1}{2}g^{mj}(\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{jk}-\partial_j g_{ki})=\ {}^z\Gamma^m_{ik}$$

この左辺は $Christoffel$ の記号 ${}^g\Gamma^m_{ik}$ に等しい。(終)

命題 1.7.2 N次元空間 Ω_N 上に、接続係数 ${}^y\Gamma^i_{jk}$, ${}^z\Gamma^i_{jk}$ が与えられているとき、この２つの差 $({}^y\Gamma^i_{jk}-\ {}^z\Gamma^i_{jk})$ は $(1,2)$ 次テンソルである。

(証明)　座標変換による接続係数の変換式、

$${}^y\bar{\Gamma}^i_{jk}=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^l}\ {}^y\Gamma^l_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^k}+\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial\bar{x}^j\partial\bar{x}^k}$$

$${}^z\bar{\Gamma}^i_{jk}=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^l}\ {}^z\Gamma^l_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^k}+\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial\bar{x}^j\partial\bar{x}^k}$$

この２式の差をとることで結果を得る。(終)

命題 1.7.3 N次元空間 Ω_N 上に、計量 g_{ij} とスカラー λ が与えられているとき、計量 λg_{ij} の $Christoffel$ の記号の値は、

$${}^g\Gamma^i_{jk}+(\delta^i_j C_k+\delta^i_k C_j-g^{il}C_l g_{jk})\ \ ,\quad C_i=\partial_i\log\sqrt{\lambda}$$

である。ここで、 ${}^g\Gamma^i_{jk}$ は g_{ij} の $Christoffel$ の記号である。

(証明)

$$=\frac{1}{2\lambda}g^{il}\{\partial_j(\lambda g_{kl})+\partial_k(\lambda g_{jl})-\partial_l(\lambda g_{jk})\}$$

$$=\frac{1}{2}g^{il}(\partial_j g_{kl}+\partial_k g_{jl}-\partial_l g_{jk})$$

$$+\frac{1}{2\lambda}g^{il}\{(\partial_j\lambda)g_{kl}+(\partial_k\lambda)g_{jl}-(\partial_l\lambda)g_{jk}\}$$

$$=\ {}^g\Gamma^i_{jk}+g^{il}(C_j g_{kl}+C_k g_{jl}-C_l g_{jk})$$

(終)

命題 1.7.4 N次元空間 Ω_N 上に、計量 g_{ij} が与えられている。 g_{ij} の $Christoffel$ の記号を ${}^g\Gamma^i_{jk}$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$\partial_k g_{ij}=g_{il}\ {}^g\Gamma^l_{jk}+g_{jl}\ {}^g\Gamma^l_{ik}$$

（証明）

$$ {}^{g}\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}) $$

より、

$$ g_{mi}\ {}^{g}\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2}(\partial_j g_{km} + \partial_k g_{jm} - \partial_m g_{jk}) \quad (1) $$

これの j と m を入れ替えて、

$$ g_{ji}\ {}^{g}\Gamma^{i}_{mk} = \frac{1}{2}(\partial_m g_{kj} + \partial_k g_{mj} - \partial_j g_{mk}) \quad (2) $$

この２つを足し合わせることで、

$$ g_{mi}\ {}^{g}\Gamma^{i}_{jk} + g_{ji}\ {}^{g}\Gamma^{i}_{mk} = \partial_k g_{jm} $$

（終）

命題 1.7.5 N次元空間 Ω_N 上に、計量 g_{ij} が与えられている。$x^i(s)$ をこの空間上の任意の曲線とする、パラメータ s を、

$$ ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j $$

とし、

$$ F^i = \frac{dv^i}{ds} + {}^{g}\Gamma^{i}_{jk} v^j v^k \quad , \quad v^i = \frac{dx^i}{ds} $$

と F^i を定義すると、

$$ g_{ij} F^i v^j = 0 $$

が成り立つ。すなわち、 F^i と v^i は g_{ij} に関して直交する。

（証明）

$$ \begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}(g_{ij} v^i v^j) = {}^{g}\nabla_k (g_{ij} v^i v^j) v^k \\ &= ({}^{g}\nabla_k g_{ij}) v^i v^j v^k + 2 g_{ij} ({}^{g}\nabla_k v^i) v^j v^k \end{aligned} $$

$Riemann$ 空間論によれば ${}^{g}\nabla_k g_{ij} = 0$ だから、

$$ 0 = g_{ij} ({}^{g}\nabla_k v^i) v^j v^k $$

ところが、 $F^i = ({}^{g}\nabla_k v^i) v^k$ であるから、これより結果を得る。（終）

命題 1.7.6 N次元空間 Ω_N 上に、計量 g_{ij} が与えられている。${}^{g}\Gamma^{i}_{jk}$ を g_{ij} に対する $Christoffel$ の記号とするとき、等式

$$ \partial_i \log \sqrt{g} = {}^{g}\Gamma^{l}_{li} \quad , \quad g = det(g_{ij}) $$

が成り立つ。

（証明） 線型代数学による行列式の定義によれば、

$$g = \Sigma\epsilon(\rho) g_{1i_1} g_{2i_2} ... g_{Ni_N} \quad (1)$$

ここで、 ρ は置換

$$\rho = (12...N) \to (i_1 i_2 ... i_N)$$

を表す。$\epsilon(\rho)$ は置換 ρ の符号である。Σ の和はすべての置換 ρ にわたるものとする。式 (1) を x^p で微分すると、

$$\partial_p g = \Sigma\epsilon(\rho)(\partial_p g_{1i_1}) g_{2i_2} ... g_{Ni_N} \ + \ \Sigma\epsilon(\rho) g_{1i_1} (\partial_p g_{2i_2}) ... g_{Ni_N} +$$

$$. \ . \ . \ + \ \Sigma\epsilon(\rho) g_{1i_1} g_{2i_2} ... (\partial_p g_{Ni_N})$$

$$= (\partial_p g_{1l})\Delta_{1l} + (\partial_p g_{2l})\Delta_{2l} + ... + (\partial_p g_{Nl})\Delta_{Nl} = (\partial_p g_{kl})\Delta_{kl}$$

ここで、Δ_{ij} は行列 g_{ij} の余因子である。さらに、線型代数学による等式 $g^{ij} = \Delta_{ji}/g$ を使えば、（ここで g^{ij} は g_{ij} の逆行列とする）

$$\partial_p g = (\partial_p g_{kl})\Delta_{kl} = (\partial_p g_{kl}) g g^{kl} \quad (2)$$

を得る。一方、

$$0 = {}^g\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - {}^g\Gamma^l_{ki} g_{lj} - {}^g\Gamma^l_{kj} g_{li}$$

の両辺に g^{ij} をほどこすと、

$$0 = g^{ij}\partial_k g_{ij} - {}^g\Gamma^l_{ki} g_{lj} g^{ij} - {}^g\Gamma^l_{kj} g_{li} g^{ij}$$

これより、

$$g^{ij}\partial_k g_{ij} = 2 \ {}^g\Gamma^i_{ki}$$

これに、式 (2) を使えば、

$$g^{-1}\partial_k g = 2 \ {}^g\Gamma^i_{ki}$$

これより結果を得る。（終）

命題 1.7.7 N次元空間 Ω_N 上に、曲線 $x^i(t)$ と接続係数 ${}^a\Gamma^i_{jk}$ が与えられているとき、

$$B^i = {}^a[x^i/t]$$

は反変ベクトルである。

（証明）　座標変換 $x^i \to \bar{x}^i$ によって、 B^i がどう変化するかをみればよい。公式 (7) によって、

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\Big(\frac{d^2\bar{x}^p}{dt^2} + \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{d\bar{x}^j}{dt}\frac{d\bar{x}^k}{dt}\Big)$$

このかっこ内の第２項を、公式 (5) によって書き換えれば、

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\Big(\frac{d^2\bar{x}^p}{dt^2} - \frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^m \partial x^n}\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^n}{dt}\Big) \quad (1)$$

接続係数の変換規則によって、

$${}^a\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\,{}^a\bar{\Gamma}^p_{mn}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^k}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial^2 \bar{x}^p}{\partial x^j \partial x^k}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} \quad (2)$$

式 (1) と (2) を足しあわせれば、

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + {}^a\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p}\Big(\frac{d^2\bar{x}^p}{dt^2} + {}^a\bar{\Gamma}^p_{mn}\frac{d\bar{x}^m}{dt}\frac{d\bar{x}^n}{dt}\Big)$$

（終）

§１．８　公式

ここに、全体を通じて使用する一般的な公式を列挙する。各式は簡単な計算によって確認することができる。

$Christoffel$ の記号について、

$${}^g\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}) \quad (1)$$

$${}^g\nabla_k g_{ij} = 0, \quad {}^g\nabla_k g^{ij} = 0 \quad (2)$$

$Christoffel$ の記号の座標変換は、

$${}^g\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\,{}^g\Gamma^l_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \quad (3)$$

t を s の関数とするとき、

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^3\frac{d^2t}{ds^2} \quad (4)$$

N次元空間 Ω_N の座標 $(x^i),(y^i),(z^i)$ があるとき、

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^l}\frac{\partial^2 y^l}{\partial x^j \partial x^k} = -\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^l \partial y^m}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}\frac{\partial y^m}{\partial x^k} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial z^m \partial z^n}\frac{\partial z^m}{\partial x^j}\frac{\partial z^n}{\partial x^k} + \frac{\partial y^i}{\partial z^l}\frac{\partial^2 z^l}{\partial x^j \partial x^k} \quad (6)$$

$$\frac{d^2y^i}{dt^2}=\frac{\partial y^i}{\partial x^n}\Big(\frac{d^2x^n}{dt^2}+\frac{\partial x^n}{\partial y^l}\frac{\partial^2 y^l}{\partial x^j\partial x^k}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\Big) \qquad (7)$$

さらに、接続係数 ${}^a\Gamma^i_{jk}$ と曲線 $x^i(t)$ が与えられているとき、式 ${}^a[x^i/t]$ をパラメータ変換 $t\to s$ すると、

$${}^a[x^i/t]=\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2\ {}^a[x^i/s]+\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx^i}{ds} \qquad (8)$$

参 考 文 献

(1) 石原繁：幾何学概論 (共立数学講座９)(共立出版,1995)

時空理論　第１章

2010 年３月　 Ver1.1　 発行

著者：渡辺 満 , 発行者：渡辺 満