時空理論／テンソル入門＋1

渡辺 満（静岡県）

§0 はじめに

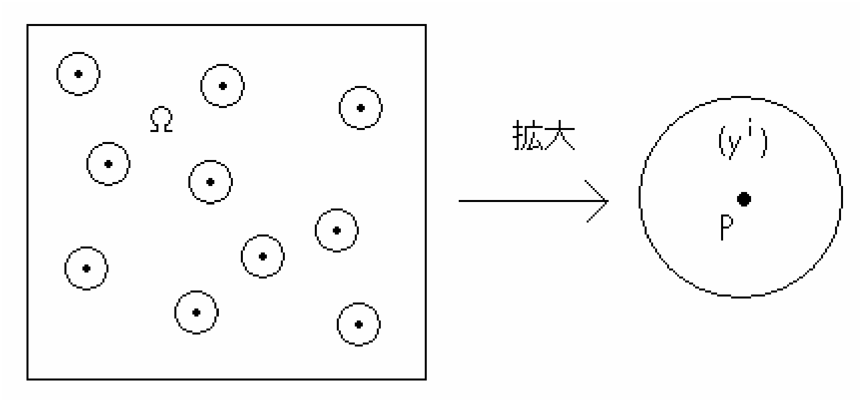
ここでは、テンソルの体系を、さらに豊かにする道具、
「各点座標」を導入する。
各点座標を用いれば、新たなる微分法、「共変微分」が定義できる。
この共変微分は、普通の微分法と同じように、分配則が成り立ち、
また、共変微分した結果が、またテンソルになるなど、
よい性質を持っている。

物理学では、局所慣性座標というものがあるが、
各点座標は、そこから抽出した概念である。

後半で、この各点座標を作り出すことができる、
その資格を持つ係数について、具体的な候補を上げる。

テンソルの世界は、座標変換の世界である。
しかし、単なる座標変換から、なぜ、このような深い世界が出現するのか、
不思議でしょうがない。
まるで、曼荼羅のような、万華鏡のような世界なのだ。

§1 各点座標



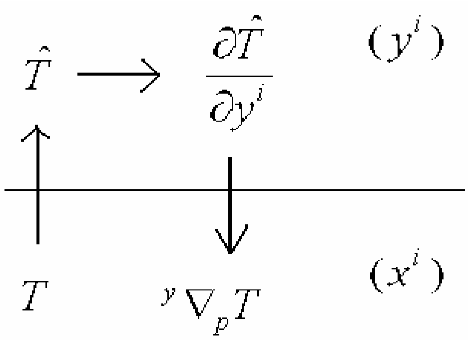
N 次元空間Ω上の各点 P に、小さな座標 (y^i) を与えて、
これを、各点座標 (y^i) と呼ぶ。
各点座標に対して、それと区別するため、台座の座標 (x^i) を、
広域座標と呼ぶことがある。
イメージとして、点 P の各点座標は、点 P の近傍を平らに見せる座標である。

Ω上に記号 ${}^y\Gamma^k_{pq}$ を、次の式で定義し、これを各点座標 (y^i) の係数と呼ぶ。

$${}^y\Gamma^k_{pq} = \frac{\partial x^k}{\partial y^n}\frac{\partial^2 y^n}{\partial x^p \partial x^q} \quad \cdots \text{点 P で}$$

${}^y\Gamma^k_{pq}$ は、Ω上の関数となる。明らかに、${}^y\Gamma^k_{pq} = {}^y\Gamma^k_{qp}$ である。

●各点座標による共変微分



何をやるのかと言うと、
広域座標 (x^i) 上のテンソルを、各点座標 (y^i) 上に持っていき、

それを、偏微分 $\dfrac{\partial}{\partial y^i}$ した後に、再び、座標 (x^i) 上に持っていく。

この作業を例として、(0,1)次テンソル A_i で行ってみる。

A_i の (y^i) 上での表現を $\hat{A}_i$ とすると、 $\hat{A}_i = \dfrac{\partial x^j}{\partial y^i} A_j$ であるが、

これに対して、

$$X_{ji} = \frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^i}\frac{\partial \hat{A}_q}{\partial y^p}$$ を考え、これを計算してみる。

少し複雑になるが、テンソルには、これが付いてまわる。

$$X_{ji} = \frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^p}\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^q}A_k\right) = \frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^i}\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p \partial y^q}A_k + \frac{\partial x^k}{\partial y^q}\frac{\partial A_k}{\partial y^p}\right)$$

$$= \frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p \partial y^q}A_k + \frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial y^q}\frac{\partial A_k}{\partial y^p}$$

$$= \frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p \partial y^q}A_k + \frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial A_i}{\partial y^p}$$

$$= \frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p \partial y^q}A_k + \frac{\partial A_i}{\partial x^j}$$

ここで、次の公式を用いる。・・(簡単な計算で確かめることができる。)

＊＊公式＊＊＊

$$\frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^p \partial y^q} = -\frac{\partial x^k}{\partial y^n}\frac{\partial^2 y^n}{\partial x^j \partial x^i}$$

＊　＊＊＊

すると、

$$X_{ji} = -\frac{\partial x^k}{\partial y^n}\frac{\partial^2 y^n}{\partial x^j \partial x^i}A_k + \frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - {}^{y}\Gamma^k_{ji}A_k$$

が得られる。

$${}^{y}\nabla_j A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - {}^{y}\Gamma^k_{ji}A_k$$

${}^{y}\nabla_j A_i$ を、A_i の各点座標 (y^i) による共変微分と呼ぶ。

§2 共変微分

一般のテンソルについても、同様にして、共変微分が計算・定義できる。
いくつかの例を上げる。

S **をスカラー、** A_i **を(0,1)次、** B^i **を(1,0)次、** T_{ij} **を(0,2)次、** K^i_j **を(1,1)次、**

H^{ij} **を(2,0)次テンソルとするとき、その定義は次のよう。**

$$ {}^y\nabla_j S = \frac{\partial S}{\partial x^j} \quad \cdots = \frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial S}{\partial y^p} $$

$$ {}^y\nabla_j A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - {}^y\Gamma^k_{ji}A_k \quad \cdots = \frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial y^q}{\partial x^i}\frac{\partial \hat{A}_q}{\partial y^p} $$

$$ {}^y\nabla_j B^i = \frac{\partial B^i}{\partial x^j} + {}^y\Gamma^i_{jp}B^p \quad \cdots = \frac{\partial y^p}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^q}\frac{\partial \hat{B}^q}{\partial y^p} $$

$$ {}^y\nabla_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - {}^y\Gamma^p_{ki}T_{pj} - {}^y\Gamma^p_{kj}T_{ip} \quad \cdots = \frac{\partial y^p}{\partial x^k}\frac{\partial y^q}{\partial x^i}\frac{\partial y^r}{\partial x^j}\frac{\partial \hat{T}_{qr}}{\partial y^p} $$

$$ {}^y\nabla_k K^i_j = \frac{\partial K^i_j}{\partial x^k} + {}^y\Gamma^i_{kp}K^p_j - {}^y\Gamma^p_{kj}K^i_p \quad \cdots = \frac{\partial y^p}{\partial x^k}\frac{\partial y^q}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^r}\frac{\partial \hat{K}^r_q}{\partial y^p} $$

$$ {}^y\nabla_k H^{ij} = \frac{\partial H^{ij}}{\partial x^k} + {}^y\Gamma^i_{kp}H^{pj} + {}^y\Gamma^j_{kp}H^{ip} \quad \cdots = \frac{\partial y^p}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^q}\frac{\partial x^j}{\partial y^r}\frac{\partial \hat{H}^{qr}}{\partial y^p} $$

さらに、高次のものについても、同様の計算によって、
その定義を得ることができるが、さしあたって必要ないので、やってない。

●分配則

テンソルの共変微分について、次が成り立つ。

$$ {}^y\nabla_p(S+T) = {}^y\nabla_p S + {}^y\nabla_p T $$

$$ {}^y\nabla_p(HK) = \left({}^y\nabla_p H\right)K + H\left({}^y\nabla_p K\right) $$

ここで、和の方の S **と** T **は、同次数テンソルでなければならない。**

積 HK **には、縮約が含まれてよい。　例えば、** $H^{ip}_j K^s_{pn}$ **のように・・。**

（証明）
和については、簡単なので、省略する。
積について行う。

(1,1)次テンソル $H^l_j K^k_l$ を例にして行う。一般の場合も、同じ要領で理解する。

$${}^y\nabla_p\left(H^l_j K^k_l\right) = \frac{\partial y^m}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial y^n}\frac{\partial y^o}{\partial x^p}\frac{\partial}{\partial y^o}\left(\hat{H}^l_m \hat{K}^n_l\right)$$ ・・・定義による

$$= \frac{\partial y^m}{\partial x^j}\frac{\partial x^q}{\partial y^s}\frac{\partial y^t}{\partial x^q}\frac{\partial x^k}{\partial y^n}\frac{\partial y^o}{\partial x^p}\frac{\partial}{\partial y^o}\left(\hat{H}^s_m \hat{K}^n_t\right)$$ ・・・縮約の部分を分離 $\frac{\partial x^q}{\partial y^s}\frac{\partial y^t}{\partial x^q} = \delta^t_s$

$$= \frac{\partial y^m}{\partial x^j}\frac{\partial x^q}{\partial y^s}\frac{\partial y^t}{\partial x^q}\frac{\partial x^k}{\partial y^n}\frac{\partial y^o}{\partial x^p}\left(\frac{\partial}{\partial y^o}\hat{H}^s_m\right)\hat{K}^n_t + \frac{\partial y^m}{\partial x^j}\frac{\partial x^q}{\partial y^s}\frac{\partial y^t}{\partial x^q}\frac{\partial x^k}{\partial y^n}\frac{\partial y^o}{\partial x^p}\hat{H}^s_m\left(\frac{\partial}{\partial y^o}\hat{K}^n_t\right)$$ ・・・分配

$$= \frac{\partial y^m}{\partial x^j}\frac{\partial x^q}{\partial y^s}\frac{\partial y^o}{\partial x^p}\left(\frac{\partial}{\partial y^o}\hat{H}^s_m\right)\frac{\partial y^t}{\partial x^q}\frac{\partial x^k}{\partial y^n}\hat{K}^n_t + \frac{\partial y^m}{\partial x^j}\frac{\partial x^q}{\partial y^s}\hat{H}^s_m\frac{\partial y^t}{\partial x^q}\frac{\partial x^k}{\partial y^n}\frac{\partial y^o}{\partial x^p}\left(\frac{\partial}{\partial y^o}\hat{K}^n_t\right)$$

$$= \frac{\partial y^m}{\partial x^j}\frac{\partial x^q}{\partial y^s}\frac{\partial y^o}{\partial x^p}\left(\frac{\partial}{\partial y^o}\hat{H}^s_m\right)K^k_q + H^q_j\frac{\partial y^t}{\partial x^q}\frac{\partial x^k}{\partial y^n}\frac{\partial y^o}{\partial x^p}\left(\frac{\partial}{\partial y^o}\hat{K}^n_t\right)$$

$$= \left({}^y\nabla_p H^q_j\right)K^k_q + H^q_j\left({}^y\nabla_p H^k_q\right)$$

（終）

●命題
(a,b)次テンソルの共変微分は、(a,b+1)次テンソルになる。

例えば、(2,0)次テンソル H^{ij} の共変微分 ${}^y\nabla_k H^{ij}$ は、

(2,1)次テンソルとなる。
（証明）
例として、(2,0)次テンソル H^{ij} について行う。
一般の場合も、同じ要領で理解する。

$\hat{H}^{ij}$ を、H^{ij} の (y^i) 上での表現とする。

$${}^y\nabla_k H^{ij} = \frac{\partial y^p}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^q}\frac{\partial x^j}{\partial y^r}\frac{\partial \hat{H}^{qr}}{\partial y^p} = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^k}\frac{\partial y^p}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^m}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial y^q}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^n}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial y^r}\frac{\partial \hat{H}^{qr}}{\partial y^p}$$

$$= \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^n}\left(\frac{\partial y^p}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial y^q}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial y^r}\frac{\partial \hat{H}^{qr}}{\partial y^p}\right)$$

上式の()内は、H^{ij} の広域座標 $(\overline{x}^i)$ での共変微分となっている。

()内を ${}^{y}\nabla_l \overline{H}^{mn}$ とおけば、

$$ {}^{y}\nabla_k H^{ij} = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^m}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^n}{}^{y}\nabla_l \overline{H}^{mn} $$

これによって、${}^{y}\nabla_k H^{ij}$ は(2,1)次テンソルであることがわかる。

（終）

§3 各点座標を具体的に作る

点Ｐの各点座標(y^i)について、広域座標(x^i)での係数と、
別広域座標$(\overline{x}^i)$での係数との間には、次の関係がある。

$$\frac{\partial x^r}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^p \partial x^q}=\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^q}\left(\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial \overline{x}^m \partial \overline{x}^n}\right)\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^q}+\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^p \partial x^q}$$

・・・公式(1)とする
（確認計算は、この§の最後）

●さて、(x^i)上で、記号${}^{\#}\Gamma^p_{jk}$を用いて、点Ｐの近傍に、

次のようにして、各点座標(y^i)を作ってみる。

$$y^i = T^i_r(x^r - P^r) + \frac{1}{2}T^i_r{}^{\#}\Gamma^r_{mn}(x^m - P^m)(x^n - P^n)$$

ここで、(P^i)は点Ｐの(x^i)座標とする。

T^i_jは、(N×N)行列で、逆行列を持つとする。これより、

点Ｐ で、 $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}=T^i_j$ 、 $\dfrac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k}=T^i_r{}^{\#}\Gamma^r_{jk}$

であり、これらより、

$$\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k}={}^{\#}\Gamma^p_{jk}$$ を得る。

すなわち、${}^{\#}\Gamma^p_{jk}$は、ここで作った各点座標(y^i)の係数となる。

次に、別広域座標$(\overline{x}^i)$上でも、記号${}^{\%}\Gamma^p_{jk}$を用いて、

点Ｐの各点座標$(\overline{y}^i)$を同じ要領で、次のように作ってみる。

$$\overline{y}^i = \overline{T}^i_r(\overline{x}^r - \overline{P}^r) + \frac{1}{2}\overline{T}^i_r{}^{\%}\Gamma^r_{mn}(\overline{x}^m - \overline{P}^m)(\overline{x}^n - \overline{P}^n)$$

すると同じように、

$$\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial \overline{y}^i}\frac{\partial^2 \overline{y}^i}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^k}={}^{\%}\Gamma^p_{jk}$$ を得る。

(x^i)上・・・${}^{\#}\Gamma^p_{jk}$から(y^i) 、 $(\overline{x}^i)$上・・・${}^{\%}\Gamma^p_{jk}$から$(\overline{y}^i)$

この(y^i)と$(\overline{y}^i)$が、実質的に同じ各点座標であるためには、
(x^i)上で、(y^i)と$(\overline{y}^i)$が、同じ係数を作ればよい。
それを求めてみる。
この$(\overline{y}^i)$を、(x^i)上で表すため、前述の公式(1)を用いると、

$$\frac{\partial x^r}{\partial \overline{y}^i}\frac{\partial^2 \overline{y}^i}{\partial x^p \partial x^q}=\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^q}\left(\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial \overline{y}^i}\frac{\partial^2 \overline{y}^i}{\partial \overline{x}^m \partial \overline{x}^n}\right)\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^q}+\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^p \partial x^q}$$

$$=\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^q}{}^{\%}\Gamma^q_{mn}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^q}+\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^p \partial x^q}$$

これより、

$${}^{\#}\Gamma^p_{jk}=\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^k}=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{y}^i}\frac{\partial^2 \overline{y}^i}{\partial x^j \partial x^k}$$

となるためには、

$${}^{\#}\Gamma^p_{jk}=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^q}{}^{\%}\Gamma^q_{mn}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^k}+\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial^2 \overline{x}^q}{\partial x^j \partial x^k}$$ **・・・＃条件**

これが、条件となる。

すなわち、この条件を満たすような${}^{\#}\Gamma^r_{pq}$が、

ある各点座標の係数になることができる。その資格を持つ。

●具体的な${}^{\#}\Gamma^r_{pq}$は、どんなもの？

実は、計量g_{ij}のクリストッフェルの記号${}^{g}\Gamma^p_{jk}$は、

この＃条件を満たす、すなわち、

$${}^{g}\Gamma^p_{jk}=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^q}{}^{g}\overline{\Gamma}^q_{mn}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^k}+\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^j \partial x^k}$$ **・・・公式(2)とする**

これより、${}^{g}\Gamma^p_{jk}$から前述したようにして、各点座標を作ることができる。

さらに、クリストッフェルの記号${}^{g}\Gamma^p_{jk}$と、

任意の(1,2)次テンソルH^p_{jk}を組み合わせて、

$${}^{\#}\Gamma^p_{jk}={}^{g}\Gamma^p_{jk}+\left(H^p_{jk}+H^p_{kj}\right)$$

を作ると、これも、＃条件を満たすことがわかる。

●点 P の各点座標 (y^i) の 2 つの係数

$$ {}^{y}\Gamma^{p}_{jk}=\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j\partial x^k} \quad , \quad {}^{y}\overline{\Gamma}^{p}_{jk}=\frac{\partial \overline{x}^p}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial \overline{x}^j\partial \overline{x}^k} $$

の間には、

公式(1)より、

$$ {}^{y}\Gamma^{p}_{jk}=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^q}{}^{y}\overline{\Gamma}^{q}_{mn}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^k}+\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^r}\frac{\partial^2 \overline{x}^r}{\partial x^j\partial x^k} $$

の関係がある。 これと、公式(2)の差から、

$$ {}^{y}\Gamma^{p}_{jk}-{}^{g}\Gamma^{p}_{jk}=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^q}\left({}^{y}\overline{\Gamma}^{q}_{mn}-{}^{g}\overline{\Gamma}^{q}_{mn}\right)\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^k} $$

が得られるが、この式は、${}^{y}\Gamma^{p}_{jk}-{}^{g}\Gamma^{p}_{jk}$ が、(1,2)次テンソルである

ことを示している。

この(1,2)次テンソルを、K^{p}_{jk} と書くと、次のようになる。

$$ {}^{y}\Gamma^{p}_{jk}={}^{g}\Gamma^{p}_{jk}+K^{p}_{jk} \cdots \quad K^{p}_{jk}=K^{p}_{kj} $$

すなわち、各点座標の係数は、常に、この形に書けることになる。

（確認計算）

時空理論第 1 章の「§1.8 公式(6)」より、

$$ \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j\partial x^k}=\frac{\partial^2 y^i}{\partial \overline{x}^m\partial \overline{x}^n}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^k}+\frac{\partial y^i}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial^2 \overline{x}^l}{\partial x^j\partial x^k} $$

これより、

$$ \begin{aligned} \frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j\partial x^k}&=\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial \overline{x}^m\partial \overline{x}^n}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^k}+\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial^2 \overline{x}^l}{\partial x^j\partial x^k} \\ &=\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial \overline{x}^m\partial \overline{x}^n}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^k}+\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial^2 \overline{x}^l}{\partial x^j\partial x^k} \\ &=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^q}\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial \overline{x}^m\partial \overline{x}^n}\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^k}+\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial^2 \overline{x}^l}{\partial x^j\partial x^k} \end{aligned} $$

これから、

$$ \frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j\partial x^k}=\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^q}\left(\frac{\partial \overline{x}^q}{\partial y^i}\frac{\partial^2 y^i}{\partial \overline{x}^m\partial \overline{x}^n}\right)\frac{\partial \overline{x}^m}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{x}^n}{\partial x^k}+\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^j\partial x^k} $$

2019 年 1 月～2 月発行
著者:渡辺 満 , 発行者:渡辺 満