時空理論／テンソル入門

渡辺 満（静岡県）

§0 はじめに

フリーエネルギーの研究のため、何年間か時空理論を離れていて、
再び戻って来てみると、基礎的な事柄を、忘れてしまっていて、
あちらこちらで、ピンとこなくなっていた。
しばらく、この引き出しを、開けていなかったので、
開けにくく、なったのだ。
これは、まずいと思ったので、あわてて、基礎的な事柄を、
まとめることにした。
忘れたら、ここに戻ってくれば、わかるようにと。

時空理論は、テンソル理論であるから、これをやるためには、
テンソルの知識や計算技術が、必要になる。
それらを、自然に滑らかに、習得するために、
これは、役に立つだろう。
不足するものは、順次追加していく予定。

テンソルの体系は、規則正しく、矛盾のない、数学の体系である。
それは、とても堅固なものなので、それに身をゆだねて、
安心していることができる。
テンソルには、その台座に、N 次元空間という、
数学的実体が存在する。
その実体を、忘れないようにしていれば、迷子になることはない。

●アインシュタイン記法

アインシュタインは、便利な記法を考え出した。
この記法でないと、項目が膨大になって、どうしようもない。
これを用いれば、テンソル計算が楽に、簡単に、見やすく、行える。

下記に示した例のように、式の中に同じ添え字が、2 つあったら、
その添え字について、1 から N までの和をとる。
例えば、N=4 の場合は、

1） $A_i dx^i = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3 + A_4 dx^4$

2） $g_{ij}X^{i}X^{j}=g_{1j}X^{1}X^{j}+g_{2j}X^{2}X^{j}+g_{3j}X^{3}X^{j}+g_{4j}X^{4}X^{j}$

$=g_{11}X^{1}X^{1}+g_{12}X^{1}X^{2}+g_{13}X^{1}X^{3}+g_{14}X^{1}X^{4}$

$+g_{21}X^{2}X^{1}+g_{22}X^{2}X^{2}+g_{23}X^{2}X^{3}+g_{24}X^{2}X^{4}$

$+g_{31}X^{3}X^{1}+g_{32}X^{3}X^{2}+g_{33}X^{3}X^{3}+g_{34}X^{3}X^{4}$

$+g_{41}X^{4}X^{1}+g_{42}X^{4}X^{2}+g_{43}X^{4}X^{3}+g_{44}X^{4}X^{4}$

§1　座標

N 次元方向に広がった、固有な存在としての点の集合、
N 次元空間Ωを考える。
Ωは、数学的な実体であって、異なる 2 点 P,Q について言えば、
点 P は、どこまでも点 P であって、決して、点 Q にはならない。
Ωには、座標を付けて扱うが、座標がなくても、
数学的に存在するものと考える。

Ωの点の各々に、座標を付けることを考える。
これは、空間Ωから、N 個の数の組への、連続的な 1 対1の写像である。

$$\Omega \ \rightarrow \ (x^1, x^2, ..., x^N)$$

省略形は (x^i)
座標の付け方は、無限にあって、
空間Ωに、別の座標を、付けることも可能である。

$$\Omega \ \rightarrow \ (\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^N)$$

別の座標に換えることを、座標変換という。

$$(x^1, x^2, ..., x^N) \ \rightarrow \ (\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^N)$$

省略形は、 $(x^i) \ \rightarrow \ (\bar{x}^i)$
各 $\bar{x}^i$ は、x^i の関数になるから、

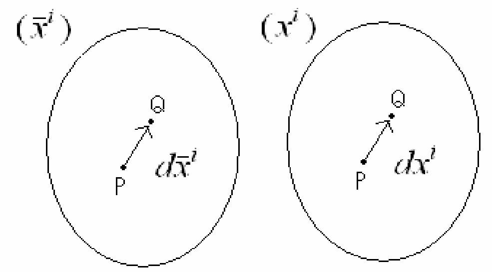
$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, ..., x^N)$$

のように、書くことができる。

●命題
2 つの座標 $(\bar{x}^i)$ と (x^i) の偏微分について、
次の置換えを行ってよい。

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} \ \Leftrightarrow \ \frac{\partial}{\partial x^l}$$

（証明）



Ω上に関数$a(x^i)$があり、Ω上の近接する 2 点 P,Q をとり、
$da = a(Q) - a(P)$ とする。
座標$(\bar{x}^i)$では、

$$da = a(\bar{x}^1 + d\bar{x}^1, ..., \bar{x}^N + d\bar{x}^N) - a(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^N) = \frac{\partial a}{\partial \bar{x}^k} d\bar{x}^k$$

一方で、 $d\bar{x}^k = \dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} dx^l$ と書けるから、これらより、

$$da = \frac{\partial a}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} dx^l$$

と書ける。 また一方で $da = \dfrac{\partial a}{\partial x^l} dx^l$ であるから、差し引いて、

$$0 = \left(\frac{\partial a}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} - \frac{\partial a}{\partial x^l} \right) dx^l$$

これは、任意のdx^lについて成り立つから、

$$\frac{\partial a}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} = \frac{\partial a}{\partial x^l}$$

でなければならない。
（終）＊＊＊＊

§2 テンソル

テンソルの一般的定義を、例を示して行う。

(x^i) 上の、N^{2+3} 個の数の組である H^{ij}_{klm} が、(2,3)次テンソルであるとは、

H^{ij}_{klm} が、座標変換 $(x^i) \to (\overline{x}^i)$ によって、

$$\overline{H}^{ij}_{klm} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^o} \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^l} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^m} H^{op}_{qrs}$$

のように、変換されるとき言う。
ここで、$i, j, k, l, m, o, p, q, r, s$　は、すべて添え字であり、
1～N の値をとる。

ここで、$\overline{H}^{ij}_{klm}$ は H^{ij}_{klm} の $(\overline{x}^i)$ 表現である。

一般的な、(a,b)次テンソルについても、同じ要領で定義する。

●テンソルの和
2つのテンソルが同じ次数であれば、その和を作ることができて、
それもまた、同じ次数のテンソルとなる。
ただし、その2つのテンソルは、Ω上の同一点のもので、
なければならない。
1 つのテンソルの式に、異なる点のテンソルが、
混在することはない。

●　スカラー　(0,0)次テンソル
N 次元空間Ω上に、数の分布 f があって、
これが、座標に依らない値であるとき、f をスカラーという。
例えば、大気中の気温分布や、気圧分布などは、スカラーである。
スカラーは、(0,0)次テンソルである。

●スカラーの勾配　(0,1)次テンソル
スカラー $f(x^i)$ に対して、その勾配 $\frac{\partial f}{\partial x^k}$ を考えると、その座標変換は、

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{x}^l} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^l} \frac{\partial f}{\partial x^k}$$　となる。

これから、$\dfrac{\partial f}{\partial x^k}$ ・・・ A_k は、(0,1)次テンソルであることがわかる。

一般に、座標変換によって、 $\overline{A}_i = \dfrac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} A_k$ と変換される A_i を、

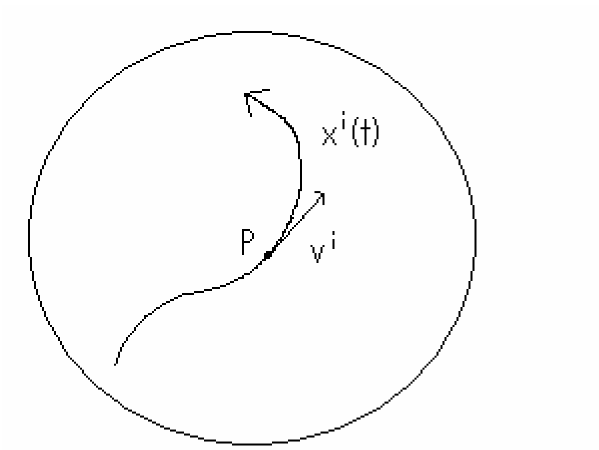
共変ベクトルと呼ぶ。 これは、(0,1)次テンソルである。

ここで、$\overline{A}_i$ は A_i の $(\overline{x}^i)$ 表現。

上記の $A_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ は、共変ベクトルの具体例である。

一般的には、テンソルの単なる偏微分は、テンソルにはならない。
そうなるためには、別に共変微分が必要になる。

●速度ベクトル (1,0)次テンソル



N 次元空間Ω上の曲線は、実数パラメータ t を用いて、
$x^i(t)$ のように表すことができる。
これは、実数 R からΩへの写像 R→Ωである。
曲線 $x^i(t)$ を点 P で、t で微分すると、

$$v^i(t) = \frac{dx^i(t)}{dt}$$

となる。 これはイメージ的には、速度である。
$v^i(t)$ は、点 P から生える接線方向を示すベクトルである。
これを座標変換すると、

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k} \frac{d\overline{x}^k(t)}{dt}$$

と書けるから、$v^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k}\overline{v}^k$ のようになり、

(1,0)次テンソルであることがわかる。

(1,0)次テンソルを、反変ベクトルとも呼ぶ。

この例に見るように、反変ベクトルは、空間上で、

方向としての意味を持っている。

●回転

A_i が(0,1)次テンソルならば、 $\dfrac{\partial A_j}{\partial x^i} - \dfrac{\partial A_i}{\partial x^j}$ は、(0,2)次テンソルになる。

これを示してみよう。

$$\frac{\partial A_j}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j}\overline{A}_k\right) = \frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^i \partial x^j}\overline{A}_k + \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{A}_k}{\partial \overline{x}^l}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^j \partial x^i}\overline{A}_k + \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{A}_k}{\partial \overline{x}^l}$$

であるから、これらより、

$$\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{A}_k}{\partial \overline{x}^l} - \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{A}_k}{\partial \overline{x}^l} = \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{A}_k}{\partial \overline{x}^l} - \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j}\frac{\partial \overline{A}_l}{\partial \overline{x}^k}$$

$$= \frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \overline{A}_k}{\partial \overline{x}^l} - \frac{\partial \overline{A}_l}{\partial \overline{x}^k}\right)$$

となる。

$$\begin{tikzcd}
(x^i) & & (\overline{x}^i) \\
A_i \arrow[rr, "\text{座標変換}"] \arrow[d, "\text{回転}"'] & & \overline{A}_i \arrow[d, "\text{回転}"'] \\
\dfrac{\partial A_j}{\partial x^i} - \dfrac{\partial A_i}{\partial x^j} \arrow[rr] & & \dfrac{\partial \overline{A}_k}{\partial \overline{x}^l} - \dfrac{\partial \overline{A}_l}{\partial \overline{x}^k}
\end{tikzcd}$$

物理学では、A_i が電磁ポテンシャルのとき、

$\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right)$ は電磁場となる。(N=4)

・・・電場と磁場が、この中に含まれている。

「交代テンソル・・」

$f_{ij}=\dfrac{\partial A_j}{\partial x^i}-\dfrac{\partial A_i}{\partial x^j}$　と置くと、　$f_{ij}=-f_{ji}$　であるが、

こうなるものを、交代テンソルと呼ぶ。

$$\bar{f}_{ij}=\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}f_{kl}=-\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}f_{lk}=-\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}f_{lk}=-\bar{f}_{ji}$$

となるから、交代性は、座標変換で遺伝する、ことがわかる。

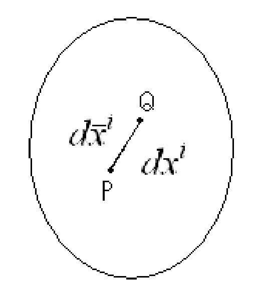
(2,0)次の交代テンソルでは、どうだろうか？

$f^{ij}=-f^{ji}$　であるから、

$$\bar{f}^{ij}=\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}f^{kl}=-\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}f^{lk}=-\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}f^{lk}=-\bar{f}^{ji}$$

となるから、同じように、座標変換で遺伝する、ことがわかる。

§3 計量



Ω上の近接する 2 点、P と Q の間の、計量 g_{ij} による距離 ds は、

$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ と書ける。

この計量を別座標 $(\bar{x}^i)$ で表現したものを $\bar{g}_{ij}$ とすると、

これは、同じ距離を与えるから、

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \bar{g}_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j$$

一方で、 $dx^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j$ だから、これを入れると、

$$g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} d\bar{x}^k d\bar{x}^l = \bar{g}_{kl} d\bar{x}^k d\bar{x}^l$$

これより、

$$\left(g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} - \bar{g}_{kl} \right) d\bar{x}^k d\bar{x}^l = 0$$

これは、任意の $d\bar{x}^i$ について成り立つから、

$\bar{g}_{kl} = \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l} g_{ij}$ でなければならない。

これより、計量 g_{ij} は、(0,2)次テンソルであることがわかる。

計量 g_{ij} は、$g_{ij} = g_{ji}$ である。このようなものを、対称テンソルと呼ぶ。

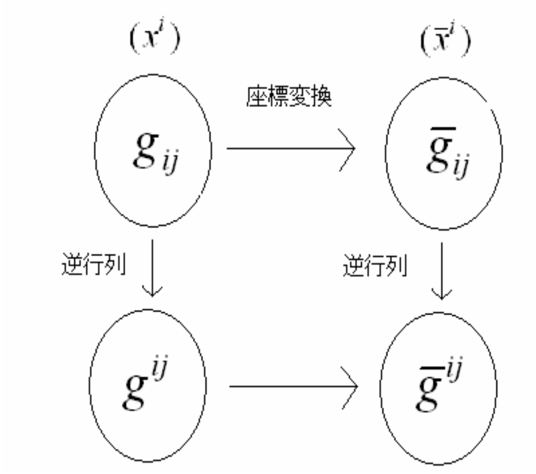
計量の起源は、解析幾何学の内積からだろう。
対称性は、内積の a・b=b・a から来ている。

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}g_{kl} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}g_{lk} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}g_{lk} = \bar{g}_{ji}$$

となるから、対称性は、座標変換で遺伝する、ことがわかる。

（ g_{ij} は、対称テンソルであり、対称性は座標変換によって保存される。）

●計量の逆行列



計量 g_{ij} の逆行列を g^{ij} とする、すなわち、$g^{ik}g_{kj}=\delta^i_j$　である。

ここで、δ^i_j は、クロネッカーのデルタで、

δ^i_j ・・・i=j のとき=1、他は=0　、と定義されている。

$$\overline{g}_{kl}=\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^l}g_{ij}\quad,\quad \overline{g}^{kl}=\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^j}g^{ij}$$

とすると、

$$\overline{g}^{kl}\overline{g}_{\ln}=\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^j}g^{ij}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^n}g_{pq}=\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^j}\frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^l}g^{ij}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^n}g_{pq}$$
$$=\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}g^{ip}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^n}g_{pq}=\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^n}\delta^i_q=\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^n}=\delta^k_n$$

これより、$\overline{g}^{ij}$ は $\overline{g}_{ij}$ の逆行列であることがわかる。

$$\overline{g}^{kl}=\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^j}g^{ij}$$　の式より、

計量の逆行列は、(2,0)次テンソルであることがわかる。

● g^{ij} は、必然的に対称 $g^{ij}=g^{ji}$ となる。なぜならば、

$$\delta^i_j=g^{ik}g_{kj}=g^{ik}g_{jk}$$

この両辺に、g^{pj} を乗じて、

$$\delta^i_j g^{pj} = g^{ik} g_{jk} g^{pj} = g^{ik} g^{pj} g_{jk} = g^{ip}$$

一方、左辺は g^{pi} であるから、$g^{pi} = g^{ip}$ を得る。

§4　テンソルの積と縮約

一般に、2つのテンソルの積を考えることができ、
(a1,b1)次テンソルと、(a2,b2)次テンソルの積は、
(a1+a2,b1+b2)次テンソルとなる。

これを、例を用いて説明する。

(2,0)次テンソル g^{ij} と、(0,1)次テンソル A_k があるとき、

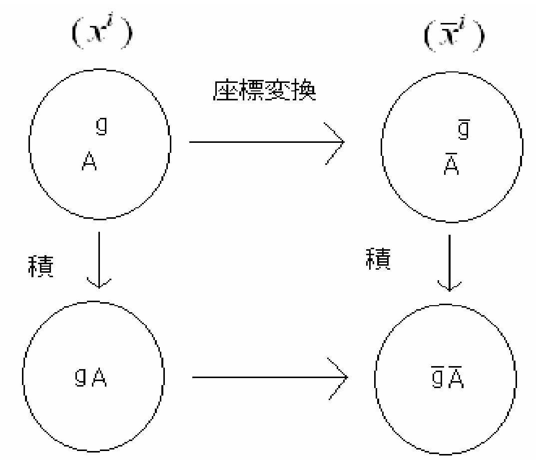
その積 $g^{ij}A_k$ を考えると、

$$\overline{g}^{ij} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} g^{kl} \quad , \quad \overline{A}_m = \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^m} A_n$$

とすると、

$$\overline{g}^{ij}\overline{A}_m = \left(\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l} g^{kl}\right)\left(\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^m} A_n\right) = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^l}\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^m}\left(g^{kl}A_n\right)$$

となるから、$g^{ij}A_k$ は、(2,1)次テンソルとなる。



このように、積の定義は、座標変換によって変らない。

●縮約

次に、テンソルの縮約について、例を用いて説明する。

(1,2)次テンソル H^i_{jk} があるとき、k=i とした H^i_{ji} を考える。

$$X_j = H^i_{ji} = H^1_{j1} + H^2_{j2} + \ldots$$

すなわち、上下の添え字の、ある１組を同じにして、
添え字 i ついての和とする。 さて、

$$\overline{H}^i_{jk} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^k} H^l_{mn}$$

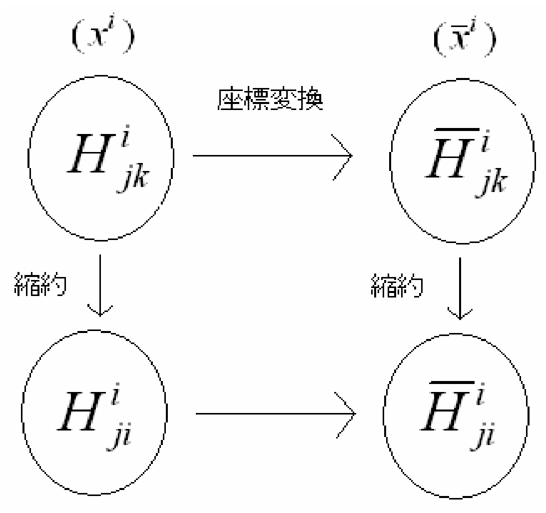
であるから、これより、

$$\overline{H}^i_{ji} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^i} H^l_{mn} = \delta^n_l \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^j} H^l_{mn} = \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^j} H^l_{ml}$$

となる。

これより、H^i_{ji} は、(0,1)次テンソルと見なせる。

一般のテンソルについても、同じ要領で理解する。



（注意）
１つの式中に含まれる、各々のテンソルは、
すべて、Ω上の同一点のもので、なければならない。
１つの式中に、異なる複数点のテンソルが、
混在することはありえない。

2019 年 1 月～2 月　発行
著者：渡辺　満　，発行者：渡辺　満