# 時空理論／単相の世界＋2

## （電磁場の方程式）

渡辺 満 （静岡県）

### §0 はじめに

次第に、物理学で重要なのは、“各点構造”ではないか？
と思うようになった。

- 物理学を学び始めた頃、好きだった、波のホイヘンスの原理
- 僕の時空理論の各点座標と単相定理
- 各点の $ae^{i\theta}$ が、くるくる回る、シュレーディンガーの波動関数
- 詳しくはないが、接バンドルやファイバーバンドル

これらは皆、各点構造と呼べるものを、有している。

北斎画： 波に浮かぶ小船が各点座標に対応。

実は、物理学上の方程式の多くは、広域的にではなく、
各点構造として、局所的に成立するもの、なのでは、あるまいか？
古典的な重力場の方程式や電磁場の方程式も、
実は、本来は局所的なものを、知らない間に、
広域的なものとして扱った、結果なのでは、あるまいか？

## §１　電磁場の方程式

これは、前回の　時空理論／単相の世界＋1.pdf　（§２)の、続きである。
前回、得られた重力場の方程式は、

$$-B^{ij}\partial_i\partial_j\eta + B^{ij}\partial_i A_j = \frac{1}{6}\rho_m \quad ・・・（点Ｐで）$$

であった。
この式において、「質量は $A_i$ を発生しない」 を要請するならば、

$$B^{ij}\partial_i A_j = 0 \quad ・・・（点Ｐで） \quad ....(1.1)$$

が要請されるだろう。
式(1.1)は、電磁気学において、
“ローレンツ・ゲージ”と呼ばれるものに、一致する。

式(1.1)を、電磁気学のローレンツ・ゲージとして、
展開・反映させるためには、まず、その舞台として、
前回扱った “点Ｐの広域単相各点慣性座標（ $\lambda_P = 1$ ）” の上で、
Maxwell の方程式が成立する、とすべきだろう。

幸い、Maxwell の方程式には、$G_{ij}$ や $\lambda B_{ij}$ の $\lambda$ に当たるものがなく、

元々、各点慣性座標上の方程式に見える。

●4元電磁気学によれば、Maxwell の方程式は、4元的に次のように書ける。

$$\partial_j f^{ij} = J^i \quad ....(1.3)$$

ここで、

$$f_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \quad , \quad f^{ij} = B^{ik}B^{jl}f_{kl} \qquad (i, j, k, l = 1,2,3,4)$$

$J^i$ は、4元電流密度である。
4元電磁気学において、ローレンツ・ゲージの要請は、
これから示す計算からも、わかるように、
数学的に整った良い結果をもたらし、好ましいものである。

●　以下に、Maxwell の方程式(1.3)に、ローレンツ・ゲージ式(1.1)を施すと、
どうなるか、その計算を示す。
これは、4元電磁気学で、よく知られた計算である。

（ $B^{11} = B^{22} = B^{33} = -1$ ， $B^{44} = 1$ ， 他は０）

$$\partial_j f^{ij} = \partial_j \{B^{ik} B^{jl} (\partial_k A_l - \partial_l A_k)\} = B^{ik} B^{jl} (\partial_j \partial_k A_l - \partial_j \partial_l A_k)$$

$$= B^{ik} B^{jl} \partial_j \partial_k A_l - B^{ik} B^{jl} \partial_j \partial_l A_k = B^{ik} \partial_k (B^{jl} \partial_j A_l) - B^{ik} B^{jl} \partial_j \partial_l A_k$$

となるが、ここに $B^{ij} \partial_i A_j = 0$ を用いると、

$$\partial_j f^{ij} = -B^{ik} B^{jl} \partial_j \partial_l A_k = -B^{jl} \partial_j \partial_l (B^{ik} A_k)$$

となり、方程式(1.3)は、

$$-B^{jl} \partial_j \partial_l A^i = J^i \quad , \quad A^i = B^{ik} A_k \qquad \cdots（点 P で） \quad ....(1.5)$$

のようになる。
これは、綺麗な $A^i$ の4つの波動方程式である。$(i = 1,2,3,4)$
また、前回の重力場も、$\eta$ の波動方程式であった。
$A^i$ の方程式は、式(1.1)かつ式(1.5)の 2 つとなる。

●各点座標上で線形的
以前、路の理論では、
“自由落下路は、各点座標上で直線” という要請を行った。
今回、場の理論では、重力場、電磁場に対して、
“各点座標上で、線形的な波動方程式“ という要請を行った。
“各点座標上で線形的“ が共通している。

●古典物理学の場合

$\lambda B_{ij}$ の $\lambda$ が、比較的に平坦な場合には、各点座標とベース座標は、

近似的に同一視できる。
このとき、各点座標上の方程式を、そのまま、ベース座標上の方程式と考えても、
近似的には正しい。 これが、古典物理学の場合だろう。

（メモ：$\eta$ は単相座標変換でないと、存続できないが、
$A_i$ の方は共変ベクトルなので、任意の座標変換でも存続できる。）

## §2　広域的な一般座標上では

前節では、電磁場の方程式として、
各点座標上に、Maxwell の方程式を与えたわけだが、
これを、広域的な一般座標 $(x^i)$ 上に落としたら、どうなるだろうか。
（この $(x^i)$ を時にベース座標と呼ぶことがある。）

重力場では、${}^{y}R = \rho_m$　が、広域的な一般座標上の式であった。

＊＊＊＊
一般に、各点座標 $(z^i)$ 上の式を、広域的な座標 $(x^i)$ 上に落とす場合、
例えば、

$$\overline{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} A_k$$

の $(z^i)$ 上での 1 階微分、$\dfrac{\partial \overline{A}_i}{\partial z^j}$ を考えると、

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial z^j} = \frac{\partial}{\partial z^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial z^i} A_k\right)$$

のように、2 階微分 $\dfrac{\partial^2 x^k}{\partial z^j \partial z^i}$ が現われ、これを展開していくと、
「時空理論本体第 1 章」で述べたように、

$$\frac{\partial \overline{A}_i}{\partial z^j} = \frac{\partial x^l}{\partial z^j}\frac{\partial x^m}{\partial z^i}{}^{z}\nabla_l A_m \quad , \quad {}^{z}\nabla_l A_m = \frac{\partial A_m}{\partial x^l} - {}^{z}\Gamma^k_{lm} A_k \quad , \quad {}^{z}\Gamma^k_{lm} = \frac{\partial x^k}{\partial z^p}\frac{\partial z^p}{\partial x^l \partial x^m}$$

が導かれる。
一方、$(z^i)$ 上での 2 階微分、$\dfrac{\partial^2 \overline{A}_i}{\partial z^j \partial z^k}$ になると、

$$\frac{\partial^2 \overline{A}_i}{\partial z^j \partial z^k} = \frac{\partial^2}{\partial z^j \partial z^k}\left(\frac{\partial x^l}{\partial z^i} A_l\right)$$

のように、3 階微分 $\dfrac{\partial^2 x^l}{\partial z^j \partial z^k \partial z^i}$ が現れてきて、
これを展開すると、大変に複雑なものになる。

これには、$\partial_i {}^{z}\Gamma^k_{lm}$ が現れてきて、これが曲率にまとまるならよいが、

そうそう、うまくはいかないだろう。
＊＊＊＊

●Maxwell の方程式を、広域的なベース座標$(x^i)$上に落とす。

$$\bar{f}^{ik} = \frac{\partial z^i}{\partial x^l}\frac{\partial z^k}{\partial x^m} f^{lm} \quad , \quad \bar{J}^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^k} J^k$$

とするとき、各点座標$(z^i)$上での、Maxwell の方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial z^k}\bar{f}^{ik} = \bar{J}^i$$

と書ける。 これをベース座標$(x^i)$上に落とすと、

$$\frac{\partial}{\partial z^k}\bar{f}^{lk} = \frac{\partial z^l}{\partial x^i}{}^z\nabla_k f^{ik}$$

となる。

復習のために、詳細を書くと、

$${}^z\nabla_k f^{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} f^{ij} + {}^z\Gamma^i_{kp} f^{pj} + {}^z\Gamma^j_{kp} f^{ip} \quad , \quad {}^z\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{\partial z^p}{\partial x^j \partial x^k}$$

である。

（確認）

$$\frac{\partial p}{\partial z^i} = \frac{\partial x^k}{\partial z^i}\frac{\partial p}{\partial x^k} \to \bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial z^i} A_k$$

$$\frac{\partial}{\partial z^k}\bar{f}^{lm} = \frac{\partial x^p}{\partial z^k}\frac{\partial z^l}{\partial x^q}\frac{\partial z^m}{\partial x^r}{}^z\nabla_p f^{qr}$$

$$\to \quad \frac{\partial}{\partial z^k}\bar{f}^{lk} = \frac{\partial x^p}{\partial z^k}\frac{\partial z^l}{\partial x^q}\frac{\partial z^k}{\partial x^r}{}^z\nabla_p f^{qr} = \delta^p_r \frac{\partial z^l}{\partial x^q}{}^z\nabla_p f^{qr} = \frac{\partial z^l}{\partial x^q}{}^z\nabla_p f^{qp}$$

---

2018 年 1 月発行　V2
著者:渡辺 満 , 発行者:渡辺 満