§６．１０　一般的な命題

命題 6.10.1　N 次元空間 (x^i) に計量 g_{ij} が与えられている。f^{ij} を (x^i) 上の $(2,0)$ 次交代テンソルとするとき、等式

$$\partial_i(\sqrt{g}\ {}^g\nabla_p f^{ip}) = 0$$

が成り立つ。ここで ${}^g\nabla_p$ は計量 g_{ij} の $Christoffel$ の記号による共変微分とする。

（証明）　$c^i = {}^g\nabla_p f^{ip}$ とおく。

$$\partial_i(\sqrt{g}c^i) = (\partial_i\sqrt{g})c^i + \sqrt{g}\partial_i c^i$$

である。右辺の各々の項を計算すると、

$$(\partial_i\sqrt{g})c^i = \partial_i\sqrt{g}(\partial_p f^{ip} + {}^g\Gamma^p_{pr}f^{ir})$$

命題 1.7.6 によれば、

$${}^g\Gamma^p_{pr} = \partial_r \log\sqrt{g}$$

であるから、上式は

$$(\partial_i\sqrt{g})c^i = (\partial_i\sqrt{g})\partial_p f^{ip} + (\partial_i\sqrt{g})(\partial_r \log\sqrt{g})f^{ir}$$

この式の第２項は、

$$= (\partial_i\sqrt{g})\frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_r\sqrt{g})f^{ir} = 0$$

よって、

$$(\partial_i\sqrt{g})c^i = (\partial_i\sqrt{g})\partial_p f^{ip} \quad (1)$$

一方で、

$$c_i = \partial_p f^{ip} + {}^g\Gamma^p_{pr}f^{ir}$$

より、

$$\partial_i c^i = \partial_i\partial_p f^{ip} + \partial_i({}^g\Gamma^p_{pr}f^{ir})$$

この右辺の第１項は 0 であるから、

$$\partial_i c^i = \partial_i(\partial_r \log\sqrt{g} f^{ir})$$

$$= (\partial_i \partial_r \log \sqrt{g}) f^{ir} + (\partial_r \log \sqrt{g}) \partial_i f^{ir}$$

この式の第１項は 0 であるから、

$$\sqrt{g}\partial_i c^i = \sqrt{g}(\partial_r \log \sqrt{g})\partial_i f^{ir} = (\partial_r \sqrt{g})\partial_i f^{ir}$$

$$= -(\partial_i \sqrt{g})\partial_p f^{ip} \quad (2)$$

(1) と (2) より結果を得る。（終）

命題 6.10.2　N 次元空間 (x^i) に計量 g_{ij} が与えられている。g_{ij} 関係の変分について、

$$\delta g^{ij} = -g^{ik} g^{jl} \delta g_{kl} \quad (1)$$

$$\delta g = g g^{ij} \delta g_{ij} \quad (2)$$

が成り立つ。

（証明）　まず、(1) は $g^{ik} g_{kl} = \delta^i_l$ より、

$$(\delta g^{ik}) g_{kl} + g^{ik} \delta g_{kl} = 0$$

この両辺に g^{jl} をほどこすと、

$$(\delta g^{ik}) g_{kl} g^{jl} + g^{ik} g^{jl} \delta g_{kl} = 0$$

これより、結果を得る。

次に、(2) は命題 1.7.6 の最初の部分と同様の方法で、得ることができる。（終）

命題 6.10.3　この命題はかつて数学者の $Hilbert$ が導いたものだと思うが、確認のためもあって、ここに計算の詳細を記述する。

N 次元空間 (x^i) に計量 g_{ij} が与えられている。${}^gR$ を g_{ij} によるスカラー曲率とするとき、${}^gR\sqrt{g}$ に変分 δg_{ij} をほどこすと、

$$\delta({}^gR\sqrt{g}) = -\sqrt{g}({}^gR^{ij} - \frac{1}{2}{}^gR g^{ij})\delta g_{ij}$$

$$+\partial_i\{\sqrt{g}(g^{pr}\delta\, {}^g\Gamma^i_{pr} - g^{ip}\delta\, {}^g\Gamma^r_{rp})\}$$

となる。この式の第２項はある式 P^i によって $\partial_i P^i$ と書けるが、この形の式をここでは除去項と呼んで、第１項と区別する。

ここで、計量 g_{ij} による曲率を次のように定義している。

$$ {}^gR^i_{jkl} = \partial_j\ {}^g\Gamma^i_{kl} - \partial_k\ {}^g\Gamma^i_{lj} + \ {}^g\Gamma^i_{jp}\ {}^g\Gamma^p_{kl} - \ {}^g\Gamma^i_{kp}\ {}^g\Gamma^p_{lj} $$

$$ {}^gR_{ij} = \ {}^gR^p_{pij}\ ,\quad {}^gR^{ij} = g^{ip}g^{jr}\ {}^gR_{pr}\ ,\quad {}^gR = g^{pr}\ {}^gR_{pr} $$

ここで、 $g = \det(g_{ij})$ としている。 ${}^gR_{ij} = \ {}^gR_{ji}$ が成り立つ。

（証明）

$$ {}^gR\sqrt{g} = \sqrt{g}g^{ij}(\partial_k\ {}^g\Gamma^k_{ij} - \partial_i\ {}^g\Gamma^k_{kj}) + \sqrt{g}g^{ij}(\ {}^g\Gamma^k_{kl}\ {}^g\Gamma^l_{ij} - \ {}^g\Gamma^k_{il}\ {}^g\Gamma^l_{kj}) $$

ここで、$\bar{g}^{ij} = \sqrt{g}g^{ij}$ とおくと、この右辺第１項は、

$$ = \partial_k(\bar{g}^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{ij}) - \partial_i(\bar{g}^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{kj}) - \partial_k\bar{g}^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{ij} + \partial_i\bar{g}^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{kj} $$

となる。この式の第１項、第２項は除去項になるから、最後にまとめて処理することにして、一時的に除外する。そうすると、変分の対象として、

$$ L_1 = \sqrt{g}g^{ij}(\ {}^g\Gamma^k_{kl}\ {}^g\Gamma^l_{ij} - \ {}^g\Gamma^k_{il}\ {}^g\Gamma^l_{kj}) - \partial_k\bar{g}^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{ij} + \partial_i\bar{g}^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{kj} $$

を考えればよい。

L_1 を次の各項を独立変数とする関数とみて、この各項で偏微分すると、

$$ {}^g\Gamma^i_{jk}\ ,\ g^{ij}\ ,\ g\ ,\ \partial_k g^{ij}\ ,\ \partial_i\sqrt{g} $$

まず ${}^g\Gamma^i_{jk}$ の偏微分は、

$$ \begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial\ {}^g\Gamma^s_{tu}} &= \bar{g}^{ij}\delta^k_s\delta^k_t\delta^l_u\ {}^g\Gamma^l_{ij} + \bar{g}^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{kl}\delta^l_s\delta^i_t\delta^j_u - \bar{g}^{ij}\delta^k_s\delta^i_t\delta^l_u\ {}^g\Gamma^l_{kj} \\ &\quad -\bar{g}^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{il}\delta^l_s\delta^k_t\delta^j_u - \partial_k\bar{g}^{ij}\delta^k_s\delta^i_t\delta^j_u + \partial_i\bar{g}^{ij}\delta^k_s\delta^k_t\delta^j_u \\ &= \bar{g}^{ij}\delta^t_s\ {}^g\Gamma^u_{ij} + \bar{g}^{tu}\ {}^g\Gamma^k_{ks} - \bar{g}^{tj}\ {}^g\Gamma^u_{sj} - \bar{g}^{iu}\ {}^g\Gamma^t_{is} \\ &\quad -\partial_s\sqrt{g}g^{tu} - \sqrt{g}\partial_s g^{tu} + \partial_i\sqrt{g}g^{iu}\delta^t_s + \sqrt{g}\partial_i g^{iu}\delta^t_s \\ &= -\sqrt{g}(\partial_s g^{tu} + g^{tj}\ {}^g\Gamma^u_{sj} + g^{iu}\ {}^g\Gamma^t_{is}) + \sqrt{g}\delta^t_s(\partial_i g^{iu} + g^{ij}\ {}^g\Gamma^u_{ij}) \\ &\quad +\sqrt{g}g^{tu}\ {}^g\Gamma^k_{ks} + \partial_i\sqrt{g}g^{iu}\delta^t_s - \partial_s\sqrt{g}g^{tu} \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} &= -\sqrt{g}(\partial_s g^{tu} + \ {}^g\Gamma^u_{sp}g^{pt} + \ {}^g\Gamma^t_{sp}g^{pu}) + \sqrt{g}\delta^t_s(\partial_i g^{iu} + \ {}^g\Gamma^u_{ij}g^{ij} + \ {}^g\Gamma^i_{ip}g^{pu}) \\ &\quad -\sqrt{g}\ {}^g\Gamma^i_{ip}g^{pu}\delta^t_s + \sqrt{g}g^{tu}\ {}^g\Gamma^k_{ks} + \sqrt{g}\ {}^g\Gamma^p_{pi}g^{iu}\delta^t_s - \sqrt{g}\ {}^g\Gamma^p_{ps}g^{tu} \end{aligned} $$

ここで、最後の２つの項に命題 1.7.6 の

$$ \partial_i\sqrt{g} = \sqrt{g}\ {}^g\Gamma^p_{pi} $$

を使った。

この第１項の（ ）内は ${}^g\nabla_s g^{tu} = 0$ 、第２項の（ ）内は ${}^g\nabla_i g^{iu} = 0$ 、また、第３項から第６項までも互いに打ち消しあって 0 となる。すなわち、

$$\frac{\partial L_1}{\partial\ {}^g\Gamma^s_{tu}} = 0$$

さて、次のために L_1 の $\bar{g}^{ij}$ を元に戻して、

$$L_1 = \sqrt{g} g^{ij} (\ {}^g\Gamma^k_{kl}\ {}^g\Gamma^l_{ij} -\ {}^g\Gamma^k_{il}\ {}^g\Gamma^l_{kj}) - \partial_k \sqrt{g} g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{ij} - \sqrt{g}\partial_k g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{ij}$$

$$+\partial_i \sqrt{g} g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{kj} + \sqrt{g}\partial_i g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{kj}$$

としておく。

その他の偏微分は、

$$\frac{\partial L_1}{\partial g^{pr}} = \sqrt{g}(\ {}^g\Gamma^k_{kl}\ {}^g\Gamma^l_{pr} -\ {}^g\Gamma^k_{pl}\ {}^g\Gamma^l_{kr}) - \partial_k \sqrt{g}\ {}^g\Gamma^k_{pr} + \partial_p \sqrt{g}\ {}^g\Gamma^k_{kr}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial g} = \frac{1}{2\sqrt{g}} g^{ij} (\ {}^g\Gamma^k_{kl}\ {}^g\Gamma^l_{ij} -\ {}^g\Gamma^k_{il}\ {}^g\Gamma^l_{kj}) - \frac{1}{2\sqrt{g}}(\partial_k g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{ij} - \partial_i g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{kj})$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial(\partial_i g^{pr})} = -\sqrt{g}\ {}^g\Gamma^i_{pr} + \sqrt{g}\delta^p_i\ {}^g\Gamma^k_{kr}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial(\partial_s \sqrt{g})} = -g^{ij}\ {}^g\Gamma^s_{ij} + g^{sj}\ {}^g\Gamma^k_{kj}$$

となる。

これらの偏微分を使用して、δL_1 を

$$\delta L_1 = \frac{\partial L_1}{\partial\ {}^g\Gamma^s_{tu}} \delta\ {}^g\Gamma^s_{tu} + \frac{\partial L_1}{\partial g^{pr}} \delta g^{pr} + \frac{\partial L_1}{\partial g} \delta g + \frac{\partial L_1}{\partial(\partial_i g^{pr})} \delta(\partial_i g^{pr}) + \frac{\partial L_1}{\partial(\partial_s \sqrt{g})} \delta(\partial_s \sqrt{g})$$

から計算する。この右辺第１項はすでに見たように 0 であるから、第２項から始める。ここで、命題 6.10.2 を用いる。

$$\frac{\partial L_1}{\partial g^{pr}} \delta g^{pr} = -\sqrt{g}(\ {}^g\Gamma^k_{kl}\ {}^g\Gamma^l_{pr} -\ {}^g\Gamma^k_{pl}\ {}^g\Gamma^l_{kr}) g^{ps} g^{rt} \delta g_{st} \quad (1)$$

$$+(\partial_k \sqrt{g}\ {}^g\Gamma^k_{pr} - \partial_p \sqrt{g}\ {}^g\Gamma^k_{kr}) g^{ps} g^{rt} \delta g_{st} \quad (2)$$

次は、まず等式

$$\frac{\partial L_1}{\partial(\partial_i g^{pr})} \delta(\partial_i g^{pr}) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big\{\frac{\partial L_1}{\partial(\partial_i g^{pr})} \delta g^{pr}\Big\} - \Big\{\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial L_1}{\partial(\partial_i g^{pr})}\Big\} \delta g^{pr}$$

の右辺の第１項は、除去項であるから、最後に処理するとして除外すると、

$$= (-\partial_i \sqrt{g}\ {}^g\Gamma^i_{pr} - \sqrt{g}\partial_i\ {}^g\Gamma^i_{pr} + \partial_i \sqrt{g}\delta^p_i\ {}^g\Gamma^k_{kr} + \sqrt{g}\delta^p_i \partial_i\ {}^g\Gamma^k_{kr}) g^{ps} g^{rt} \delta g_{st}$$

$$= (-\partial_i\sqrt{g}\ {}^g\Gamma^i_{pr} - \sqrt{g}\partial_i\ {}^g\Gamma^i_{pr} + \partial_p\sqrt{g}\ {}^g\Gamma^k_{kr} + \sqrt{g}\partial_p\ {}^g\Gamma^k_{kr})g^{ps}g^{rt}\delta g_{st} \quad (3)$$

ここで、$(1)+(2)+(3)$ を考えると、(2) と、(3) の第１項と、(3) の第３項の和は 0 になる。残りの和は、

$$(1)+(2)+(3) = -\sqrt{g}(\partial_i\ {}^g\Gamma^i_{pr} - \partial_p\ {}^g\Gamma^k_{kr} + {}^g\Gamma^k_{kl}\ {}^g\Gamma^l_{pr} - {}^g\Gamma^k_{pl}\ {}^g\Gamma^l_{kr})g^{ps}g^{rt}\delta g_{st}$$

この ( ) 内は、計量 g_{ij} の曲率 ${}^gR_{pr}$ であるから、

$$= -\sqrt{g}\ {}^gR_{pr}g^{ps}g^{rt}\delta g_{st} = -\sqrt{g}\ {}^gR^{st}\delta g_{st}$$

となる。

次に、等式

$$\frac{\partial L_1}{\partial(\partial_p\sqrt{g})}\partial_p(\delta\sqrt{g}) = \frac{\partial}{\partial x^p}\left\{\frac{\partial L_1}{\partial(\partial_p\sqrt{g})}\delta\sqrt{g}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^p}\left\{\frac{\partial L_1}{\partial(\partial_p\sqrt{g})}\right\}\delta\sqrt{g}$$

この右辺の第１項は、除去項であるから、最後に処理するとして除外すると、

$$= -(-\partial_p g^{ij}\ {}^g\Gamma^p_{ij} - g^{ij}\partial_p\ {}^g\Gamma^p_{ij} + \partial_p g^{pj}\ {}^g\Gamma^k_{kj} + g^{pj}\partial_p\ {}^g\Gamma^k_{kj})\frac{1}{2\sqrt{g}}gg^{st}\delta g_{st} \quad (4)$$

次に、

$$\frac{\partial L_1}{\partial g}\delta g = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ij}(\ {}^g\Gamma^k_{kl}\ {}^g\Gamma^l_{ij} - \ {}^g\Gamma^k_{il}\ {}^g\Gamma^l_{kj})g^{st}\delta g_{st}$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{g}(\partial_k g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{ij} - \partial_i g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{kj})g^{st}\delta g_{st} \quad (5)$$

上の (4) と (5) の和は、

$$(4)+(5) = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{st}\delta g_{st}g^{ij}(\partial_p\ {}^g\Gamma^p_{ij} - \partial_i\ {}^g\Gamma^k_{kj} + \ {}^g\Gamma^k_{kl}\ {}^g\Gamma^l_{ij} - \ {}^g\Gamma^k_{il}\ {}^g\Gamma^l_{kj})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{st}\delta g_{st}g^{ij}\ {}^gR_{ij} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{st}\delta g_{st}\ {}^gR$$

これらより結果の第１項を得る。

さて、次に残った４つの除去項を集めると、

$$\delta\{\partial_k(\sqrt{g}g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{ij})\} = \partial_i\{\delta(\sqrt{g}g^{pr}\ {}^g\Gamma^i_{pr})\}$$

$$= \partial_i(\delta\sqrt{g}g^{pr}\ {}^g\Gamma^i_{pr} + \sqrt{g}\delta g^{pr}\ {}^g\Gamma^i_{pr} + \sqrt{g}g^{pr}\delta\ {}^g\Gamma^i_{pr})$$

$$\delta\{-\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{kj})\} = -\partial_i\{\delta(\sqrt{g}g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{kj})\}$$

$$= -\partial_i(\delta\sqrt{g}g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{kj} + \sqrt{g}\delta g^{ij}\ {}^g\Gamma^k_{kj} + \sqrt{g}g^{ij}\delta\ {}^g\Gamma^k_{kj})$$

$$\partial_i\Big\{\frac{\partial L_1}{\partial(\partial_i g^{pr})}\delta g^{pr}\Big\} = \partial_i\{(-\sqrt{g}\ {}^g\Gamma^i_{pr} + \sqrt{g}\delta^p_i\ {}^g\Gamma^k_{kr})\delta g^{pr}\}$$

$$\partial_i\Big\{\frac{\partial L_1}{\partial(\partial_i \sqrt{g})}\delta\sqrt{g}\Big\} = \partial_i\{(-g^{pr}\ {}^g\Gamma^i_{pr} + g^{ip}\ {}^g\Gamma^r_{rp})\delta\sqrt{g}\}$$

これらの４つを足しあわせると、多くが互いに打ち消し合って、

$$\partial_i\{\sqrt{g}(g^{pr}\delta\ {}^g\Gamma^i_{pr} - g^{ip}\delta\ {}^g\Gamma^r_{rp})\}$$

となる。（終）

命題 6.10.4　４次元計量

$$G_{ij} = \lambda B_{ji}$$

について、そのスカラー曲率 ${}^GR$ の値は、

$${}^GR = -6\lambda^{-1}(B^{ij}\partial_i\partial_j\xi + B^{ij}\partial_i\xi\partial_j\xi)\quad,\quad \xi = \log\sqrt{\lambda}$$

または、

$${}^GR = -6\sqrt{\lambda}^{-3}B^{ij}\partial_i\partial_j\sqrt{\lambda}$$

である。

（証明）　定義より、

$${}^GR_{ij} = \partial_h\ {}^G\Gamma^h_{ji} - \partial_j\ {}^G\Gamma^h_{hi} + \ {}^G\Gamma^h_{hp}\ {}^G\Gamma^p_{ji} - \ {}^G\Gamma^h_{jp}\ {}^G\Gamma^p_{hi}$$

とするとき、 G_{ij} のスカラー曲率は

$${}^GR = G^{ij}\ {}^GR_{ij}$$

である。これを計算すると、まず命題 1.7.3 より

$${}^G\Gamma^h_{ji} = \delta^h_j C_i + \delta^h_i C_j - B^{hl}C_l B_{ij}\quad,\quad C_i = \partial_i\xi$$

である。これを用いれば、

$$\partial_h\ {}^G\Gamma^h_{ji} = \partial_j C_i + \partial_i C_j - B^{hl}\partial_h C_l B_{ij}$$

$$\partial_j\ {}^G\Gamma^h_{hi} = 4\partial_j C_i$$

であることがわかる。さらに

$${}^G\Gamma^h_{hp} = 4C_p$$

$$
{}^G\Gamma^h_{hp}\ {}^G\Gamma^p_{ji} = 8C_iC_j - 4B^{kl}C_kC_lB_{ij}
$$
$$
-\ {}^G\Gamma^h_{jp}\ {}^G\Gamma^p_{hi} = -6C_iC_j + 2B^{kl}C_kC_lB_{ij}
$$

である。これらより、

$$
{}^G R_{ij} = -2\partial_i C_j + 2C_iC_j - 2B^{kl}C_kC_lB_{ij} - B^{kl}\partial_k C_l B_{ij}
$$

を得るが、さらに

$$
{}^G R = \lambda^{-1} B^{ij}\ {}^G R_{ij}
$$

を計算して結果を得る。また、第２の結果は等式

$$
\sqrt{\lambda}^{-1}\partial_i\partial_j\sqrt{\lambda} = \partial_i\partial_j\xi + \partial_i\xi\partial_j\xi
$$

を用いて得られる。（終）

§６．１１　$Kaluza$ 計量に関する計算

$Kaluza$ 計量（５次元） $k_{\lambda\mu}$ を

$$
k_{\lambda\mu} = G_{\lambda\mu} + A_\lambda A_\mu
$$

によって定義する。また、 f_{ij}, f^{ij} を

$$
f_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i
$$
$$
f^{ij} = G^{ip}G^{jr}f_{pr}
$$

と定義する。

命題 6.11.1　 $k^{\lambda\mu}$ を $k^{\lambda\alpha}k_{\alpha\mu} = \delta^\lambda_\mu$ なるテンソルとすると、

$$
k^{00} = G^{ij}A_iA_j + 1\ ,\ k^{0i} = k^{i0} = -G^{il}A_l\ ,\ k^{ij} = G^{ij}
$$

である。

（証明）

$$
k^{\lambda\mu} = h^{\lambda\mu}(0, x^1, ..., x^4)
$$

と書ける。これに命題 2.5.1 を使用すれば得られる。（終）

命題 6.11.2　 $Kaluza$ 計量 $k_{\lambda\mu}$ について、その $Chirstoffel$ の記号 ${}^k\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の値は、

$$
{}^k\Gamma^\lambda_{\mu 0} = \frac{1}{2}k^{\lambda l}f_{\mu l} \quad (1)
$$

$$ {}^{k}\Gamma^0_{jk} = \frac{1}{2}({}^{G}\nabla_j A_k + {}^{G}\nabla_k A_j) - \frac{1}{2}A_p G^{pl}(f_{jl}A_k + f_{kl}A_j) \quad (2) $$

$$ {}^{k}\Gamma^i_{jk} = {}^{G}\Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2}G^{il}(f_{jl}A_k + f_{kl}A_j) \quad (3) $$

（証明）　命題 2.5.2 の証明を参考にすれば、次の等式が成り立つ。

$$ {}^{k}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}k^{\lambda\alpha}(\partial_\mu G_{\nu\alpha} + \partial_\nu G_{\mu\alpha} - \partial_\alpha G_{\mu\nu}) $$

$$ +\frac{1}{2}k^{\lambda\alpha}(A_\mu f_{\nu\alpha} + A_\nu f_{\mu\alpha} + A_\alpha S_{\mu\nu}) $$

ここで、

$$ S_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu $$

とする。これを使って、

(1) は、

$$ {}^{k}\Gamma^\lambda_{\mu 0} = \frac{1}{2}k^{\lambda\alpha}(\partial_\mu G_{0\alpha} + \partial_0 G_{\mu\alpha} - \partial_\alpha G_{\mu 0}) $$

$$ +\frac{1}{2}k^{\lambda l}(A_\mu f_{0l} + A_0 f_{\mu l} + A_l S_{\mu 0}) $$

$$ +\frac{1}{2}k^{\lambda 0}(0 + 0 + 0) $$

これより結果を得る。

(2) は、

$$ {}^{k}\Gamma^0_{jk} = \frac{1}{2}k^{0l}(\partial_j G_{kl} + \partial_k G_{jl} - \partial_l G_{jk}) $$

$$ +\frac{1}{2}k^{00}(\partial_j G_{k0} + \partial_k G_{j0} - \partial_0 G_{jk}) $$

$$ +\frac{1}{2}k^{0l}(A_j f_{kl} + A_k f_{jl} + A_l S_{jk}) $$

$$ +\frac{1}{2}k^{00}(0 + 0 + A_0 S_{jk}) $$

この右辺第 1 項が、 $-A_p \, {}^{G}\Gamma^p_{jk}$ であることに注意すれば、

$$ {}^{k}\Gamma^0_{jk} = -A_p \, {}^{G}\Gamma^p_{jk} - \frac{1}{2}A_p G^{pl}(A_j f_{kl} + A_k f_{jl} + A_l S_{jk}) $$

$$ +\frac{1}{2}(G^{pr}A_p A_r + 1)S_{jk} $$

これより結果を得る。

(3) は、

$$ {}^{k}\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}k^{il}(\partial_j G_{kl} + \partial_k G_{jl} - \partial_l G_{jk}) $$

$$ +\frac{1}{2}k^{i0}(\partial_j G_{k0} + \partial_k G_{j0} - \partial_0 G_{jk}) $$

$$+\frac{1}{2}k^{il}(A_jf_{kl}+A_kf_{jl}+A_lS_{jk})$$

$$+\frac{1}{2}k^{i0}(0+0+S_{jk})$$

この右辺第１項が、 ${}^G\Gamma^i_{jk}$ であることに注意すれば、

$${}^k\Gamma^i_{jk}= {}^G\Gamma^i_{jk}+\frac{1}{2}G^{il}(A_jf_{kl}+A_kf_{jl}+A_lS_{jk})-\frac{1}{2}G^{il}A_lS_{jk}$$

これより結果を得る。（終）

命題 6.11.3　*Kaluza* 計量 $k_{\lambda\mu}$ について、その曲率テンソル ${}^kR_{\lambda\mu}$ の値は、

$${}^kR_{00}=\frac{1}{4}f^{pr}f_{pr}\quad(1)$$

$${}^kR_{0i}=\frac{1}{2}G^{pr}\ {}^G\nabla_pf_{ir}+\frac{1}{4}f^{pr}f_{pr}A_i\quad(2)$$

$${}^kR_{ij}= {}^GR_{ij}+\frac{1}{2}G^{pr}(A_i\ {}^G\nabla_pf_{jr}+A_j\ {}^G\nabla_pf_{ir})$$

$$+\frac{1}{4}f^{pr}f_{pr}A_iA_j-\frac{1}{2}G^{pr}f_{ip}f_{jr}\quad(3)$$

$${}^kR= {}^GR-\frac{1}{4}f^{pr}f_{pr}\quad(4)$$

曲率テンソル ${}^kR_{\lambda\mu}$ の定義は、命題 6.10.3 のそれに従う。

（証明）　以降の計算においては、わずらわしいので、 *Kaluza* 計量の曲率テンソルや *Christoffel* の記号の左肩の k は省略する。例えば、 ${}^kR$ は単に R と書く。しかし、 *Kaluza* 計量以外の曲率テンソルや *Christoffel* の記号については、省略は行わない。

R_{ij} の計算

$$R_{ij}=\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{ij}-\partial_i\Gamma^\alpha_{\alpha j}+\Gamma^\alpha_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{ij}-\Gamma^\alpha_{i\nu}\Gamma^\nu_{\alpha j}\quad(a)$$

の各々の項について計算を行っていく。

これより、 $(a.1)$ の表現によって、式 a の第１項を指すものとする。 $(a.2.3)$ は式 $(a.2)$ の第３項を指す。

$(a.1)$

$$\partial_\alpha\Gamma^\alpha_{ij}=\partial_l\Gamma^l_{ij}$$

$$=\partial_l\ {}^G\Gamma^l_{ij}+\frac{1}{2}\partial_lG^{lk}(f_{ik}A_j+f_{jk}A_i)+\frac{1}{2}G^{lk}\partial_l(f_{ik}A_j+f_{jk}A_i)$$

この第１項は ＜まとめ ４＞ へ、この第２項は ＜まとめ ３＞ へ、

$(a.1.3)$

$$\frac{1}{2}G^{lk}\partial_l(f_{ik}A_j + f_{jk}A_i)$$

$$= \frac{1}{2}G^{lk}\partial_l f_{ik}A_j + \frac{1}{2}G^{lk}f_{ik}\partial_l A_j + \frac{1}{2}G^{lk}\partial_l f_{jk}A_i + \frac{1}{2}G^{lk}f_{jk}\partial_l A_i$$

この４つの項はすべて ＜まとめ ２＞ へ。これによって、 $(a.1)$ の項はすべて ＜まとめ＞ へ持って行かれ、ここに残る項はない。

$(a.2)$

$$-\partial_i\Gamma^{\alpha}_{\alpha j} = -\partial_i\Gamma^{k}_{kj} - \partial_i\Gamma^{0}_{0j}$$

$$= -\partial_i\ {}^{G}\Gamma^{k}_{kj} - \frac{1}{2}\partial_i\{G^{kl}(f_{kl}A_j + f_{jl}A_k)\} - \partial_i\Gamma^{0}_{0j}$$

$(a.2.2)$

$$-\frac{1}{2}\partial_i\{G^{kl}(f_{kl}A_j + f_{jl}A_k)\}$$

（この第１項は０）

$$= -\frac{1}{2}\partial_i(G^{kl}f_{jl}A_k) = \frac{1}{2}\partial_i(k^{0l}f_{jl}) = \partial_i\Gamma^{0}_{0j}$$

これによって、

$$(a.2) = -\partial_i\ {}^{G}\Gamma^{k}_{kj}$$

となる。この項は ＜まとめ ４＞ へ、これによって、 $(a.2)$ の項はすべて ＜まとめ＞ へ持って行かれ、ここに残る項はない。

$(a.3)$

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{ij} = \Gamma^{k}_{k\nu}\Gamma^{\nu}_{ij} + \Gamma^{0}_{0\nu}\Gamma^{\nu}_{ij}$$

$(a.3.1)$

$$\Gamma^{k}_{k\nu}\Gamma^{\nu}_{ij} = \Gamma^{k}_{kl}\Gamma^{l}_{ij} + \Gamma^{k}_{k0}\Gamma^{0}_{ij}$$

(この第２項は０)

$$= \{\ {}^{G}\Gamma^{k}_{kl} + \frac{1}{2}G^{kp}(f_{kp}A_l + f_{lp}A_k)\}\{\ {}^{G}\Gamma^{l}_{ij} + \frac{1}{2}G^{lr}(f_{ir}A_j + f_{jr}A_i)\}$$

$$= \ {}^{G}\Gamma^{k}_{kl}\ {}^{G}\Gamma^{l}_{ij} + \frac{1}{2}\ {}^{G}\Gamma^{k}_{kl}G^{lr}(f_{ir}A_j + f_{jr}A_i) + \frac{1}{2}G^{kp}f_{lp}A_k\ {}^{G}\Gamma^{l}_{ij}$$

$$+\frac{1}{2}G^{kp}f_{lp}A_k\frac{1}{2}G^{lr}(f_{ir}A_j + f_{jr}A_i)$$

この第１項は ＜まとめ ４＞ へ、この第２項は ＜まとめ ３＞ へ、

$(a.3.2)$

$$\Gamma^{0}_{0\nu}\Gamma^{\nu}_{ij} = \Gamma^{0}_{0k}\Gamma^{k}_{ij} + \Gamma^{0}_{00}\Gamma^{0}_{ij}$$

(この第２項は０)

$$= \frac{1}{2}k^{0l}f_{kl}\{\ {}^{G}\Gamma^{k}_{ij} + \frac{1}{2}G^{kp}(f_{ip}A_j + f_{jp}A_i)\}$$

$$= -\frac{1}{2}G^{lr}A_r f_{kl}\ {}^{G}\Gamma^{k}_{ij} - \frac{1}{4}G^{lr}A_r f_{kl}G^{kp}(f_{ip}A_j + f_{jp}A_i)$$

ここで、

$$(a.3.1.3) + (a.3.2.1) = \frac{1}{2}G^{kp}f_{lp}A_k\ {}^{G}\Gamma^{l}_{ij} - \frac{1}{2}G^{lr}A_r f_{kl}\ {}^{G}\Gamma^{k}_{ij} = 0$$

$$(a.3.1.4) + (a.3.2.2) = \frac{1}{2}G^{kp}f_{lp}A_k\frac{1}{2}G^{lr}(f_{ir}A_j + f_{jr}A_i)$$

$$-\frac{1}{4}G^{lr}A_r f_{kl}G^{kp}(f_{ip}A_j + f_{jp}A_i) = 0$$

となり消える。

これによって、 $(a.3)$ の項は消えるか、＜まとめ＞へ持って行かれ、ここに残る項はない。

$(a.4)$

$$-\Gamma^{\alpha}_{i\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha j} = -\Gamma^{k}_{i\nu}\Gamma^{\nu}_{kj} - \Gamma^{0}_{i\nu}\Gamma^{\nu}_{0j}$$

$$= -\Gamma^{k}_{il}\Gamma^{l}_{kj} - \Gamma^{k}_{i0}\Gamma^{0}_{kj} - \Gamma^{0}_{il}\Gamma^{l}_{0j} - \Gamma^{0}_{i0}\Gamma^{0}_{0j}$$

$(a.4.1)$

$$-\Gamma^{k}_{il}\Gamma^{l}_{kj}$$

$$= -\{\ {}^{G}\Gamma^{k}_{il} + \frac{1}{2}G^{kp}(f_{ip}A_l + f_{lp}A_i)\}\{\ {}^{G}\Gamma^{l}_{kj} + \frac{1}{2}G^{lr}(f_{kr}A_j + f_{jr}A_k)\}$$

$$= -\ {}^{G}\Gamma^{k}_{il}\ {}^{G}\Gamma^{l}_{kj} - \frac{1}{2}\ {}^{G}\Gamma^{k}_{il}G^{lr}(f_{kr}A_j + f_{jr}A_k)\}$$

$$-\frac{1}{2}\ {}^{G}\Gamma^{l}_{kj}G^{kp}(f_{ip}A_l + f_{lp}A_i)$$

$$-\frac{1}{4}G^{kp}(f_{ip}A_l + f_{lp}A_i)G^{lr}(f_{kr}A_j + f_{jr}A_k)$$

この第１項は＜まとめ ４＞へ、この第２項は＜まとめ ２＞へ、この第３項は＜まとめ ２＞へ、この第４項は＜まとめ １＞へ、

$(a.4.2)$

$$-\Gamma^{k}_{i0}\Gamma^{0}_{kj}$$

$$= -\frac{1}{2}k^{kl}f_{il}\frac{1}{2}(\ {}^{G}\nabla_k A_j + \ {}^{G}\nabla_j A_k) + \frac{1}{4}k^{kl}f_{il}A_p G^{pr}(f_{jr}A_k + f_{kr}A_j)$$

この第１項は＜まとめ ４＞へ、この第２項は＜まとめ １＞へ、

$(a.4.3)$

$$-\Gamma^{0}_{il}\Gamma^{l}_{0j} = -\Gamma^{l}_{j0}\Gamma^{0}_{li}$$

$$= -\frac{1}{4}k^{lk}f_{jk}(\ {}^{G}\nabla_l A_i + \ {}^{G}\nabla_i A_l) + \frac{1}{4}k^{lk}f_{jk}A_pG^{pr}(f_{ir}A_l + f_{lr}A_i)$$

この第１項は ＜まとめ ４＞ へ、この第２項は ＜まとめ １＞ へ、

$(a.4.4)$

$$-\Gamma^0_{i0}\Gamma^0_{0j}$$

$$= -\frac{1}{2}k^{0l}f_{il}\frac{1}{2}k^{0p}f_{jp} = -\frac{1}{4}A_kG^{kl}f_{il}A_rG^{rp}f_{jp}$$

この項は ＜まとめ １＞ へ、

これによって、 $(a.4)$ の項は消えるか、＜まとめ＞ へ持って行かれ、ここに残る項はない。

次に行う ＜まとめ＞ によって上記の (a) に属する項目を比較し、打ち消し合うものを消し、残るものを指摘する。

＜まとめ １＞

$(a.4.1.4)$

$$-\frac{1}{4}G^{kp}(f_{ip}A_l + f_{lp}A_i)G^{lr}(f_{kr}A_j + f_{jr}A_k)$$

$$= -\frac{1}{4}G^{kp}G^{lr}f_{ip}A_lf_{kr}A_j - \frac{1}{4}G^{kp}G^{lr}f_{ip}A_lf_{jr}A_k$$

$$-\frac{1}{4}G^{kp}G^{lr}f_{lp}A_if_{kr}A_j - \frac{1}{4}G^{kp}G^{lr}f_{lp}A_if_{jr}A_k$$

$(a.4.2.2)$

$$\frac{1}{4}k^{kl}f_{il}A_pG^{pr}(f_{jr}A_k + f_{kr}A_j)$$

$$= \frac{1}{4}G^{kl}G^{pr}f_{il}A_pf_{jr}A_k + \frac{1}{4}G^{kl}G^{pr}f_{il}A_pf_{kr}A_j$$

$$(a.4.2.2.2) = \frac{1}{4}G^{kp}G^{lr}f_{ip}A_lf_{kr}A_j$$

$(a.4.3.2)$

$$\frac{1}{4}k^{lk}f_{jk}A_pG^{pr}(f_{ir}A_l + f_{lr}A_i)$$

$$= \frac{1}{4}G^{lk}G^{pr}f_{jk}A_pf_{ir}A_l + \frac{1}{4}G^{lk}G^{pr}f_{jk}A_pf_{lr}A_i$$

$$= \frac{1}{4}G^{lr}G^{kp}f_{jr}A_kf_{ip}A_l + \frac{1}{4}G^{lr}G^{kp}f_{jr}A_kf_{lp}A_i$$

$(a.4.4)$

$$-\frac{1}{4}A_kG^{kl}f_{il}A_rG^{rp}f_{jp}$$

$$= -\frac{1}{4}G^{kl}G^{pr}f_{il}A_kf_{jr}A_p$$

ここにおいて、次の項目は互いに打ち消し合う。

$$(a.4.1.4.1) + (a.4.2.2.2) = 0\ ,\ (a.4.1.4.2) + (a.4.3.2.1) = 0$$

$$(a.4.1.4.4) + (a.4.3.2.2) = 0\ ,\ (a.4.2.2.1) + (a.4.4) = 0$$

これによって、＜まとめ 1＞ において、残る項目は $(a.4.1.4.3)$ のみである。この項は ＜結果＞ へ。

$$(a.4.1.4.3) = -\frac{1}{4}G^{kp}G^{lr}f_{lp}A_i f_{kr}A_j = \frac{1}{4}A_i A_j f^{pr}f_{pr}$$

＜まとめ 2＞

$(a.4.1.2)$

$$-\frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^k_{il}G^{lr}(f_{kr}A_j + f_{jr}A_k)\}$$

$$= -\frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^k_{il}G^{lr}f_{kr}A_j - \frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^k_{il}G^{lr}f_{jr}A_k$$

$(a.4.1.3)$

$$-\frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^l_{kj}G^{kp}(f_{ip}A_l + f_{lp}A_i)$$

$$= -\frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^l_{kj}G^{kp}f_{ip}A_l - \frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^l_{kj}G^{kp}f_{lp}A_i$$

$(a.1.3.1) + (a.4.1.2.1)$

$$\frac{1}{2}G^{lk}\partial_l f_{ik}A_j - \frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^k_{il}G^{lr}f_{kr}A_j$$

$$= \frac{1}{2}G^{lk}A_j\ {}^G\nabla_l f_{ik} - \frac{1}{2}G^{lk}A_j\ {}^G\Gamma^p_{lk}f_{pi}$$

この第１項は ＜結果＞ へ、この第２項 $(m2.1)$ は ＜まとめ 3＞ へ、

$(a.1.3.3) + (a.4.1.3.2)$

$$\frac{1}{2}G^{lk}\partial_l f_{jk}A_i - \frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^l_{kj}G^{kp}f_{lp}A_i$$

$$= \frac{1}{2}G^{lk}A_i\ {}^G\nabla_l f_{jk} - \frac{1}{2}G^{lk}A_i\ {}^G\Gamma^p_{lk}f_{pj}$$

この第１項は ＜結果＞ へ、この第２項 $(m2.2)$ は ＜まとめ 3＞ へ

$(a.1.3.2) + (a.4.1.3.1)$

$$\frac{1}{2}G^{lk}f_{ik}\partial_l A_j - \frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^l_{kj}G^{kp}f_{ip}A_l$$

$$= \frac{1}{2}G^{lk}f_{ik}\ {}^G\nabla_l A_j$$

この項 $(m2.3)$ は ＜まとめ 4＞ へ、

$(a.1.3.4) + (a.4.1.2.2)$

$$\frac{1}{2}G^{lk}f_{jk}\partial_l A_i - \frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^k_{il}G^{lr}f_{jr}A_k$$

$$= \frac{1}{2}G^{lk}f_{jk}\ {}^G\nabla_l A_i$$

この項 $(m2.4)$ は ＜まとめ 4＞ へ、

これによって、＜まとめ 2＞ へ残る項はない。

＜まとめ 3＞

$(a.1.2) + (m2.1) + (m2.2) + (a.3.1.2)$

$$\frac{1}{2}\partial_l G^{lk}(f_{ik}A_j + f_{jk}A_i) - \frac{1}{2}G^{lk}A_j\ {}^G\Gamma^p_{lk}f_{pi}$$

$$-\frac{1}{2}G^{lk}A_i\ {}^G\Gamma^p_{lk}f_{pj} + \frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^k_{kl}G^{lr}(f_{ir}A_j + f_{jr}A_i)$$

$$= \frac{1}{2}(f_{ik}A_j + f_{jk}A_i)(\partial_l G^{lk} + \ {}^G\Gamma^k_{pr}G^{pr} + \ {}^G\Gamma^p_{pr}G^{rk})$$

$$= \frac{1}{2}(f_{ik}A_j + f_{jk}A_i)\ {}^G\nabla_l G^{lk} = 0$$

＜まとめ 3＞ の結果は 0 となり、先へ持ち越す項はない。

＜まとめ 4＞

$(a.1.1) + (a.2.1) + (a.3.1.1) + (a.4.1.1)$

$$\partial_l\ {}^G\Gamma^l_{ij} - \partial_i\ {}^G\Gamma^k_{kj} + \ {}^G\Gamma^k_{kl}\ {}^G\Gamma^l_{ij} - \ {}^G\Gamma^k_{il}\ {}^G\Gamma^l_{kj} = \ {}^G R_{ij}$$

この項は ＜結果＞ へ、

$(a.4.2.1) + (a.4.3.1) + (m2.3) + (m2.4)$

$$-\frac{1}{4}k^{kl}f_{il}(\ {}^G\nabla_k A_j + \ {}^G\nabla_j A_k) - \frac{1}{4}k^{lk}f_{jk}(\ {}^G\nabla_l A_i + \ {}^G\nabla_i A_l)$$

$$+\frac{1}{2}G^{lk}f_{ik}\ {}^G\nabla_l A_j + \frac{1}{2}G^{lk}f_{jk}\ {}^G\nabla_l A_i$$

$$= \frac{1}{4}G^{lk}f_{ik}(\ {}^G\nabla_l A_j - \ {}^G\nabla_j A_l) + \frac{1}{4}G^{lk}f_{jk}(\ {}^G\nabla_l A_i - \ {}^G\nabla_i A_l)$$

$$= \frac{1}{4}G^{lk}f_{ik}f_{lj} + \frac{1}{4}G^{lk}f_{jk}f_{li}$$

$$= \frac{1}{4}G^{lk}f_{ik}f_{lj} + \frac{1}{4}G^{lk}f_{ik}f_{lj}$$

$$= -\frac{1}{2}G^{kl}f_{ik}f_{jl}$$

この項は <結果> へ、

<結果>

$$R_{ij} = {}^{G}R_{ij} + \frac{1}{2}G^{pr}(A_i\, {}^{G}\nabla_p f_{jr} + A_j\, {}^{G}\nabla_p f_{ir})$$

$$+\frac{1}{4}A_iA_j(f^{pr}f_{pr}) - \frac{1}{2}G^{pr}f_{ip}f_{jr}$$

R_{0j} の計算

$$R_{0j} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{0j} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{\alpha j} + \Gamma^\alpha_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{0j} - \Gamma^\alpha_{0\nu}\Gamma^\nu_{\alpha j} \quad (b)$$

の各々の項について計算を行っていく。

これより、 $(b.1)$ の表現によって、式 b の第１項を指すものとする。$(b.2.3)$ は式 $(b.2)$ の第３項を指す。

$(b.1)$

$$\partial_\alpha \Gamma^\alpha_{0j} = \partial_l \Gamma^l_{0j} = \frac{1}{2}\partial_l k^{lk} f_{jk} + \frac{1}{2}k^{lk}\partial_l f_{jk}$$

この第１項、第２項は <まとめ> へ。

$(b.2)$

$$-\partial_0 \Gamma^\alpha_{\alpha j} = 0$$

$(b.3)$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{0j} = \Gamma^k_{k\nu}\Gamma^\nu_{0j} + \Gamma^0_{0\nu}\Gamma^\nu_{0j}$$

$$= \Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{0j} + \Gamma^k_{k0}\Gamma^0_{0j} + \Gamma^0_{0l}\Gamma^l_{0j} + \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{0j}$$

$(b.3.1)$

$$\Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{0j} = \{\, {}^{G}\Gamma^k_{kl} + \frac{1}{2}G^{kp}(f_{kp}A_l + f_{lp}A_k)\}\frac{1}{2}k^{lr}f_{jr}$$

ここで、 $G^{kp}f_{kp} = 0$ に注意。

$$= \frac{1}{2}\, {}^{G}\Gamma^k_{kl}k^{lr}f_{jr} + \frac{1}{4}G^{kp}f_{lp}A_k k^{lr}f_{jr}$$

$$= \frac{1}{2}\, {}^{G}\Gamma^k_{kl}G^{lr}f_{jr} + \frac{1}{4}f^{rk}A_k f_{jr}$$

この第１項は <まとめ> へ、第２項は $(b.3.3)$ と打ち消し合う。

$(b.3.2)$

$$\Gamma^k_{k0}\Gamma^0_{0j} = \frac{1}{2}G^{kl}f_{kl}\Gamma^0_{0j} = 0$$

$(b.3.3)$

$$\Gamma^0_{0l}\Gamma^l_{0j} = \frac{1}{2}k^{0p}f_{lp}\frac{1}{2}k^{lr}f_{jr} = -\frac{1}{4}G^{pk}A_k f_{lp}G^{lr}f_{jr}$$

$$= -\frac{1}{4}A_k f^{rk}f_{jr}$$

この項は $(b.3.1.2)$ と打ち消し合う。

$(b.3.4)$

$$\Gamma^0_{00}\Gamma^0_{0j} = 0$$

$(b.4)$

$$-\Gamma^\alpha_{0\nu}\Gamma^\nu_{\alpha j} = -\Gamma^k_{0\nu}\Gamma^\nu_{kj} - \Gamma^0_{0\nu}\Gamma^\nu_{0j}$$

$$= -\Gamma^k_{0l}\Gamma^l_{kj} - \Gamma^k_{00}\Gamma^0_{kj} - \Gamma^0_{0l}\Gamma^l_{0j} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{0j}$$

ここで、$(b.4.2) = (b.4.4) = 0$ である。

$(b.4.1)$

$$-\Gamma^k_{0l}\Gamma^l_{kj} = -\frac{1}{2}G^{kp}f_{lp}\{\ {}^G\Gamma^l_{kj} + \frac{1}{2}G^{lr}(f_{kr}A_j + f_{jr}A_k)\}$$

$$= -\frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^l_{kj}G^{kp}f_{lp} - \frac{1}{4}G^{kp}f_{lp}G^{lr}f_{kr}A_j - \frac{1}{4}G^{kp}f_{lp}G^{lr}f_{jr}A_k$$

$$= -\frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^l_{kj}G^{kp}f_{lp} - \frac{1}{4}f^{rk}f_{kr}A_j - \frac{1}{4}f^{rk}f_{jr}A_k$$

この第１項は <まとめ> へ、第２項は <結果> へ、第３項は $(b.4.3)$ と打ち消し合う。

$(b.4.3)$

$$-\Gamma^0_{0l}\Gamma^l_{0j} = -\frac{1}{2}k^{0p}f_{lp}\frac{1}{2}G^{lr}f_{jr} = \frac{1}{4}A_k G^{kp}f_{lp}G^{lr}f_{jr}$$

$$= \frac{1}{4}A_k f^{rk}f_{jr}$$

この項は $(b.4.1.3)$ と打ち消し合う。

<まとめ>

$(b.1.1) + (b.3.1.1)$

$$= \frac{1}{2}\partial_l G^{lk}f_{jk} + \frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^k_{kl}G^{lr}f_{jr}$$

$$= \frac{1}{2}\partial_l G^{lk} f_{jk} + \frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^l_{lp} G^{pk} f_{jk}$$

$$= \frac{1}{2} f_{jk}(\partial_l G^{lk} +\ {}^G\Gamma^l_{lp} G^{pk} +\ {}^G\Gamma^k_{lp} G^{lp}) - \frac{1}{2} f_{jk}\ {}^G\Gamma^k_{lp} G^{lp}$$

この第１項は ${}^G\nabla_l G^{lk} = 0$ である。第２項は $(m.1)$ とする。

$(b.1.2) + (b.4.1.1) + (m.1)$

$$= \frac{1}{2} G^{lk} \partial_l f_{jk} - \frac{1}{2}\ {}^G\Gamma^l_{kj} G^{kp} f_{lp} - \frac{1}{2} f_{jk}\ {}^G\Gamma^k_{lp} G^{lp}$$

$$= \frac{1}{2} G^{lk} \partial_l f_{jk} - \frac{1}{2} G^{lk}\ {}^G\Gamma^r_{lj} f_{rk} - \frac{1}{2} G^{lk}\ {}^G\Gamma^r_{lk} f_{jr}$$

$$= \frac{1}{2} G^{lk}(\partial_l f_{jk} -\ {}^G\Gamma^r_{lj} f_{rk} -\ {}^G\Gamma^r_{lk} f_{jr})$$

$$= \frac{1}{2} G^{lk}\ {}^G\nabla_l f_{jk}$$

この項は ＜結果＞ へ。

＜結果＞

$$R_{0j} = \frac{1}{2} G^{lk}\ {}^G\nabla_l f_{jk} + \frac{1}{4} A_j (f^{pr} f_{pr})$$

R_{00} の計算

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{\alpha 0} + \Gamma^\alpha_{\alpha\nu}\Gamma^\nu_{00} - \Gamma^\alpha_{0\nu}\Gamma^\nu_{\alpha 0} \quad (c)$$

この第１項、第２項、第３項は 0 であるから、第４項のみを計算する。

$(c.4)$

$$-\Gamma^\alpha_{0\nu}\Gamma^\nu_{\alpha 0} = -\Gamma^k_{0\nu}\Gamma^\nu_{k0} - \Gamma^0_{0\nu}\Gamma^\nu_{00}$$

この右辺第２項は 0 である。

$$= -\Gamma^k_{0l}\Gamma^l_{k0} - \Gamma^k_{00}\Gamma^0_{k0}$$

この第２項は 0 である。

$$= -\frac{1}{2} G^{kp} f_{lp} \frac{1}{2} G^{lr} f_{kr} = \frac{1}{4} f^{pr} f_{pr}$$

＜結果＞

$$R_{00} = \frac{1}{4} f^{pr} f_{pr}$$

R の計算

$$R = k^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} = k^{ij} R_{ij} + 2k^{0j} R_{0j} + k^{00} R_{00} \quad (d)$$

$(d.1)$

$$G^{ij} R_{ij} = G^{ij}\ {}^G R_{ij} + G^{ij} G^{pr} A_i\ {}^G\nabla_p f_{jr} + \frac{1}{4} G^{ij} A_i A_j (f^{pr} f_{pr})$$
$$-\frac{1}{2} G^{ij} G^{pr} f_{ip} f_{jr}$$

この第２項は、

$$G^{ij} G^{pr} A_i\ {}^G\nabla_p f_{jr} = A_i\ {}^G\nabla_p f^{ip}$$

である。

$(d.2)$

$$2k^{0j} R_{0j} = -G^{ji} A_i G^{lk}\ {}^G\nabla_l f_{jk} - \frac{1}{2} G^{ij} A_i A_j (f^{pr} f_{pr})$$
$$= -A_i\ {}^G\nabla_l f^{il} - \frac{1}{2} G^{ij} A_i A_j (f^{pr} f_{pr})$$

$(d.3)$

$$k^{00} R_{00} = k^{00} \frac{1}{4} (f^{pr} f_{pr}) = \frac{1}{4} (f^{pr} f_{pr}) + \frac{1}{4} G^{ij} A_i A_j (f^{pr} f_{pr})$$

ここまでで、 $(d.1.2)$ と $(d.2.1)$ は打ち消し合う。

＜まとめと結果＞

$$R = (d.1) + (d.2) + (d.3) = {}^G R + \frac{1}{4} G^{ij} A_i A_j (f^{pr} f_{pr})$$
$$-\frac{1}{2} (f^{pr} f_{pr}) - \frac{1}{2} G^{ij} A_i A_j (f^{pr} f_{pr}) + \frac{1}{4} (f^{pr} f_{pr}) + \frac{1}{4} G^{ij} A_i A_j (f^{pr} f_{pr})$$

これより、

$$R = {}^G R - \frac{1}{4} (f^{pr} f_{pr})$$

を得る。(終)

命題 6.11.4 *Kaluza* 計量 $k_{\lambda\mu}$ について、その曲率テンソル ${}^k R^{\lambda\mu}$ の値は、

$${}^k R^{00} = a^p a^r\ {}^G R_{pr} + \frac{1}{4} f^{pr} f_{pr} - \frac{1}{2} a^i a^j G^{pr} f_{ip} f_{jr} - A_p\ {}^G\nabla_r f^{pr} \quad (1)$$

$$ {}^{k}R^{0i} = {}^{k}R^{i0} = -G^{ip}a^r\ {}^{G}R_{rp} + \frac{1}{2}a^r f_{rp}f^{ip} + \frac{1}{2}\ {}^{G}\nabla_p f^{ip} \quad (2) $$

$$ {}^{k}R^{ij} = {}^{G}R^{ij} + \frac{1}{2}G^{jr}f^{ip}f_{pr} \quad (3) $$

である。ここで $a^i = G^{ip}A_p$ とした。

曲率テンソル ${}^{k}R^{\lambda\mu}$ の定義は、命題 6.10.3 のそれに従う。

（証明） 以降の計算においては、わずらわしいので、 $Kaluza$ 計量の曲率テンソルや $Christoffel$ の記号の左肩の k は省略する。例えば、${}^{k}R^{ij}$ は単に R^{ij} と書く。しかし、 $Kaluza$ 計量以外の曲率テンソルや $Christoffel$ の記号については、省略は行わない。

まず、

$$ R^{\lambda\mu} = k^{\lambda i}k^{\mu j}R_{ij} + k^{\lambda 0}k^{\mu j}R_{0j} + k^{\lambda i}k^{\mu 0}R_{i0} + k^{\lambda 0}k^{\mu 0}R_{00} $$

である。これを使って、

R^{kl} の計算

$$ R^{kl} = k^{ki}k^{lj}R_{ij} + k^{k0}k^{lj}R_{0j} + k^{ki}k^{l0}R_{i0} + k^{k0}k^{l0}R_{00} $$

これを、 (a) とする。

$(a.1)$

$$ k^{ki}k^{lj}R_{ij} = G^{ki}G^{lj}R_{ij} $$

$$ = {}^{G}R^{kl} + \frac{1}{2}G^{ki}G^{lj}G^{pr}(A_i\ {}^{G}\nabla_p f_{jr} + A_j\ {}^{G}\nabla_p f_{ir}) + \frac{1}{4}G^{ki}G^{lj}A_iA_j(f^{pr}f_{pr}) $$

$$ -\frac{1}{2}G^{ki}G^{lj}G^{pr}f_{ip}f_{jr} $$

$$ = {}^{G}R^{kl} + \frac{1}{2}a^k\ {}^{G}\nabla_p f^{lp} + \frac{1}{2}a^l\ {}^{G}\nabla_p f^{kp} + \frac{1}{4}a^k a^l(f^{pr}f_{pr}) - \frac{1}{2}f^{kr}G^{lj}f_{jr} $$

$(a.2)$

$$ k^{k0}k^{lj}R_{0j} = \frac{1}{2}k^{k0}G^{lj}G^{pr}\ {}^{G}\nabla_p f_{jr} + \frac{1}{4}k^{k0}G^{lj}A_j(f^{pr}f_{pr}) $$

$$ = -\frac{1}{2}a^k\ {}^{G}\nabla_p f^{lp} - \frac{1}{4}a^k a^l(f^{pr}f_{pr}) $$

$(a.3)$

$$ k^{ki}k^{l0}R_{i0} = -\frac{1}{2}a^l\ {}^{G}\nabla_p f^{kp} - \frac{1}{4}a^l a^k(f^{pr}f_{pr}) $$

$(a.4)$

$$ k^{k0}k^{l0}R_{00} = \frac{1}{4}a^k a^l(f^{pr}f_{pr}) $$

＜まとめ＞

次の項が打ち消し合う。

$$(a.1.2)+(a.2.1)=0\ ,\ (a.1.3)+(a.3.1)=0$$

$$(a.3.2)+(a.4)=0\ ,\ (a.1.3)+(a.2.2)=0$$

結果は、

$$R^{kl}={}^{G}R^{kl}+\frac{1}{2}G^{lj}f^{kr}f_{rj}$$

R^{0l} の計算

$$R^{0l}=k^{0i}k^{lj}R_{ij}+k^{00}k^{lj}R_{0j}+k^{0i}k^{l0}R_{i0}+k^{00}k^{l0}R_{00}$$

これを、 (b) とする。

$(b.1)$

$$\begin{aligned}k^{0i}k^{lj}R_{ij}&=-a^iG^{lj}\ {}^{G}R_{ij}-\frac{1}{2}a^iG^{lj}G^{pr}(A_i\ {}^{G}\nabla_pf_{jr}+A_j\ {}^{G}\nabla_pf_{ir})\\&\quad-\frac{1}{4}a^iG^{lj}A_iA_j(f^{pr}f_{pr})+\frac{1}{2}a^iG^{lj}G^{pr}f_{ip}f_{jr}\\&=-G^{lj}\ {}^{G}R_{ij}a^i-\frac{1}{2}a^iA_i\ {}^{G}\nabla_pf^{lp}-\frac{1}{2}a^lA_k\ {}^{G}\nabla_pf^{kp}\\&\quad-\frac{1}{4}a^iA_ia^l(f^{pr}f_{pr})+\frac{1}{2}a^if_{ip}f^{lp}\end{aligned}$$

$(b.2)$

$$\begin{aligned}k^{00}k^{lj}R_{0j}&=\frac{1}{2}k^{00}G^{lj}G^{pr}\ {}^{G}\nabla_pf_{jr}+\frac{1}{4}k^{00}a^l(f^{pr}f_{pr})\\&=\frac{1}{2}k^{00}\ {}^{G}\nabla_pf^{lp}+\frac{1}{4}k^{00}a^l(f^{pr}f_{pr})\end{aligned}$$

$(b.3)$

$$\begin{aligned}k^{0j}k^{l0}R_{j0}&=\frac{1}{2}k^{0j}k^{l0}G^{pr}\ {}^{G}\nabla_pf_{jr}+\frac{1}{4}k^{0j}k^{l0}A_j(f^{pr}f_{pr})\\&=\frac{1}{2}A_ka^l\ {}^{G}\nabla_pf^{kp}+\frac{1}{4}a^iA_ia^l(f^{pr}f_{pr})\end{aligned}$$

$(b.4)$

$$k^{00}k^{l0}R_{00}=-k^{00}a^l\frac{1}{4}(f^{pr}f_{pr})$$

＜まとめ＞

次の項が打ち消し合う。

$$(b.1.4)+(b.3.2)=0\ ,\ (b.2.2)+(b.4)=0\ ,\ (b.1.3)+(b.3.1)=0$$

$(b.1.2)+(b.2.1)$

$$=(-\frac{1}{2}a^iA_i+\frac{1}{2}k^{00})\ {}^G\nabla_p f^{lp}=\frac{1}{2}\ {}^G\nabla_p f^{lp}$$

これらより、結果は

$$R^{0l}=-G^{lj}\ {}^GR_{ij}a^i+\frac{1}{2}a^if_{ip}f^{lp}+\frac{1}{2}\ {}^G\nabla_p f^{lp}$$

R^{00} の計算

$$R^{00}=k^{0i}k^{0j}R_{ij}+k^{00}k^{0j}R_{0j}+k^{0i}k^{00}R_{i0}+k^{00}k^{00}R_{00}$$

これを、(c) とする。

$(c.1)$

$$k^{0i}k^{0j}R_{ij}=a^ia^j\ {}^GR_{ij}+\frac{1}{2}a^ia^jG^{pr}(A_i\ {}^G\nabla_p f_{jr}+A_j\ {}^G\nabla_p f_{ir})$$

$$+\frac{1}{4}a^ia^jA_iA_j(f^{pr}f_{pr})-\frac{1}{2}a^ia^jG^{pr}f_{ip}f_{jr}$$

$$=a^ia^j\ {}^GR_{ij}+a^iA_iA_k\ {}^G\nabla_p f^{kp}$$

$$+\frac{1}{4}a^ia^jA_iA_j(f^{pr}f_{pr})-\frac{1}{2}a^ia^jG^{pr}f_{ip}f_{jr}$$

$(c.2)$

$$k^{00}k^{0j}R_{0j}=-\frac{1}{2}k^{00}a^jG^{lk}\ {}^G\nabla_l f_{jk}-\frac{1}{4}k^{00}a^jA_j(f^{pr}f_{pr})$$

$(c.3)$

$$k^{0j}k^{00}R_{j0}=-\frac{1}{2}k^{00}a^jG^{lk}\ {}^G\nabla_l f_{jk}-\frac{1}{4}k^{00}a^jA_j(f^{pr}f_{pr})$$

$(c.4)$

$$k^{00}k^{00}R_{00}=k^{00}k^{00}\frac{1}{4}(f^{pr}f_{pr})$$

<まとめ>

$$(c.1.4)+(c.2.2)+(c.3.2)+(c.4)=\frac{1}{4}(f^{pr}f_{pr})$$

$$(c.2.1)+(c.3.1)=-(1+a^iA_i)A_p\ {}^G\nabla_l f^{pl}$$

これらから、

$$R^{00} = a^i a^j \ {}^G R_{ij} + \frac{1}{4}(f^{pr} f_{pr}) - \frac{1}{2} a^i a^j G^{pr} f_{ip} f_{jr} - A_p \ {}^G \nabla_l f^{pl}$$

（終）

命題 6.11.5 $Kaluza$ 計量 $k_{\lambda\mu}$ に関して、 $Q^{\lambda\mu}$ を

$$Q^{\lambda\mu} = \ {}^k R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} \ {}^k R k^{\lambda\mu}$$

と定義するとき、

$$Q^{\lambda i} A_\lambda = Q^{pi} A_p + Q^{0i} = \frac{1}{2} \ {}^G \nabla_p f^{ip} \quad (1)$$

$$Q^{ij} = \ {}^G R^{ij} - \frac{1}{2} \ {}^G R G^{ij} - \frac{1}{2} G^{jr} f_{rp} f^{ip} + \frac{1}{8} G^{ij} f_{pr} f^{pr} \quad (2)$$

が成り立つ。

（証明） $a^i = G^{ip} A_p$ とする。

$$Q^{\lambda i} A_\lambda = Q^{ij} A_j + Q^{0i}$$

において、

$$Q^{ij} A_j = \ {}^G R^{ij} A_j + \frac{1}{2} G^{jr} A_j f^{ip} f_{pr} - \frac{1}{2} G^{ij} A_j \ {}^G R$$

$$+ \frac{1}{8} G^{ij} A_j f^{pr} f_{pr}$$

$$Q^{0i} = \ {}^k R^{i0} + \frac{1}{2} a^i (\ {}^G R - \frac{1}{4} f^{pr} f_{pr})$$

$$= -G^{ip} \ {}^G R_{rp} G^{rk} A_k + \frac{1}{2} a^r f_{rp} f^{ip} + \frac{1}{2} \ {}^G \nabla_p f^{ip}$$

$$+ \frac{1}{2} a^i \ {}^G R - \frac{1}{8} a^i f^{pr} f_{pr}$$

これらより、 (1) を得る。 (2) は簡単なので省略する。（終）

2010 年 3 月　Ver1.1　発行

著者：渡辺 満 , 発行者：渡辺 満