計量に関する新定理

渡辺 満 （静岡県）

§0 はじめに

（これ以降、添え字 i,j,k,l,m,n…は、1,2,3,…,N の値をとる。）

N 次元空間 $(x^1, x^2, ..., x^N)$ 上に、計量 g_{ij} があるとする。

計量 g_{ij} が特に、変数 $\lambda > 0$ と、全要素が定数である(N 行 N 列)行列 B_{ij} によって、

(B_{ij} は、逆行列を持つとする)。

$$g_{ij} = \lambda B_{ij}$$

の形に書けるとき、この空間を‘単相空間’と呼ぶことにし、
このときの座標 (x^i) を、‘単相座標’と呼ぶことにする。

さて、単相(型 λB_{ij})を保存する座標変換には、どのようなものがあるだろうか？

それを問題にする。

ちなみに、座標変換 $(x^i) \to (\overline{x}^i)$ によって、計量 g_{ij} は

$$\overline{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} g_{kl}$$

のように変換されるから、ここでは、

$$\overline{\lambda} B_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} \lambda B_{kl}$$

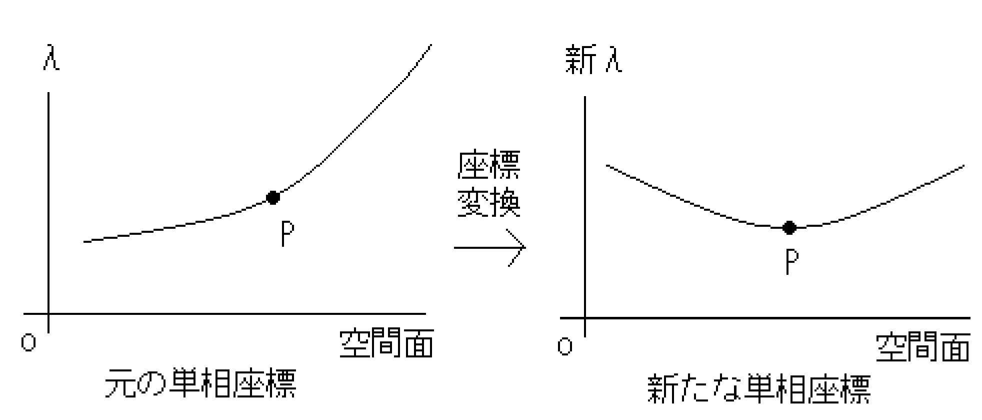
のようになる、ということである。

1次変換なら簡単で、
例えば、直交変換やローレンツ変換などが、それであるが、
（直交変換では、$B_{11} = B_{22} = ... = B_{NN} = 1$、他は 0。）
（ローレンツ変換では、N＝4 として、$B_{11} = B_{22} = B_{33} = 1$、$B_{44} = -1$、他は 0。）

しかし、1次変換ではない、実質的な、λ の分布が変化するような、
単相座標変換は、ないだろうか？、あるだろうか？
次の定理を、証明することができる。（§1,§2 で証明）

●単相定理

単相空間では、次のような、(任意に取った点 P を基点とする)、
新たな単相座標が存在する。
その新たな単相座標では、点 P で、新たな λ の勾配が 0 になる。
($\partial_i \lambda = 0$ ということ)
この新たな単相座標を、「点 P を基点とする単相座標」、と呼ぶ。



*

・・・ 証明は、自然な論理で行われ、隙間をかいくぐる類のものではない。
この定理は、数学としては、それほど魅力のあるものに、見えないかも知れないが、
物理学的には、重力に関する定理として、意味がある。
また、存在定理の証明として、よい例になるだろう。
証明は、微小な座標変換を積み重ねることで行う。

§1　連続的な座標変換

N 次元空間の点の座標(x^i)が、パラメータtに従って、時々刻々と変化する、
その様子を考える。
パラメータtは、実際の物理的時間ではないが、時間のように考えると、
思いやすいので、これ以降、'パラメータ時間' や 'パラメータ時刻' 、
などのように呼ぶ。（簡単に、'パラ時間' 、'パラ時刻' と表記する。）

ある点における、パラ時刻tにおける座標を(x^i)、
パラ時刻$t+\Delta t$における座標を$(\overline{x}^i)$とすれば、
$(x^i) \to (\overline{x}^i)$　は、微小な座標変換である。

パラ時刻tにおける計量をg_{ij}、$t+\Delta t$では$\overline{g}_{ij}$とすれば、

$$\overline{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} g_{kl}$$

である。
パラ時刻tにおける、この微小な座標変換を、S^iによって、
$\overline{x}^i = x^i + \varepsilon S^i$　　（$\varepsilon = \Delta t$）
のように書くと、

$x^i = \overline{x}^i - \varepsilon S^i$　より、　$\dfrac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} = \delta^i_j - \varepsilon \dfrac{\partial S^i}{\partial \overline{x}^j}$

である。

$$\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} = \left(\delta^k_i - \varepsilon\frac{\partial S^k}{\partial \overline{x}^i}\right)\left(\delta^l_j - \varepsilon\frac{\partial S^l}{\partial \overline{x}^j}\right) = \delta^k_i\delta^l_j - \delta^k_i\varepsilon\frac{\partial S^l}{\partial \overline{x}^j} - \varepsilon\frac{\partial S^k}{\partial \overline{x}^i}\delta^l_j$$

ここで、εの 2 次以上の項を無視した。 これから、

$$\overline{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} g_{kl} = g_{ij} - \varepsilon\frac{\partial S^l}{\partial \overline{x}^j} g_{il} - \varepsilon\frac{\partial S^k}{\partial \overline{x}^i} g_{kj}$$

となり、

$$\overline{g}_{ij} = g_{ij} - \varepsilon\left(\frac{\partial S^k}{\partial \overline{x}^j} g_{ik} + \frac{\partial S^k}{\partial \overline{x}^i} g_{jk}\right)$$

一方で、

$$\frac{\partial S^k}{\partial \overline{x}^i} = \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial S^k}{\partial x^l} = \left(\delta^l_i - \varepsilon\frac{\partial S^l}{\partial \overline{x}^i}\right)\frac{\partial S^k}{\partial x^l} = \frac{\partial S^k}{\partial x^i} - \varepsilon\frac{\partial S^l}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial S^k}{\partial x^l}$$

より、$\varepsilon = \Delta t$の 2 次以上の項を無視すれば、

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} - \varepsilon\left(\frac{\partial S^k}{\partial x^j} g_{ik} + \frac{\partial S^k}{\partial x^i} g_{jk}\right) \quad \cdots(1.1)$$

が得られる。

●連続的な単相座標変換

さて、S^i が、どのようなものであれば、
これが連続した単相保存の座標変換になるのか？　それを考える。

パラ時刻 t で、$g_{ij} = \lambda B_{ij}$ のとき、

$t + \Delta t$ でも、$\bar{g}_{ij} = \bar{\lambda} B_{ij}$ となるためには、$s_i = B_{ik} S^k$ とおくとき、

$$\frac{\partial s_j}{\partial x^i} + \frac{\partial s_i}{\partial x^j} = a B_{ij} \quad \cdots(1.2)$$

と書ければよい。　なぜならば、式(1.1)より、

$$\bar{g}_{ij} = \lambda B_{ij} - \varepsilon\lambda\left(\frac{\partial S^k}{\partial x^i} B_{jk} + \frac{\partial S^k}{\partial x^j} B_{ik}\right) = \lambda B_{ij} - \varepsilon\lambda\left(\frac{\partial s_j}{\partial x^i} + \frac{\partial s_i}{\partial x^j}\right)$$

$$= \lambda B_{ij} - \varepsilon\lambda a B_{ij} = \lambda(1 - \varepsilon a) B_{ij}$$

すなわち、　$\bar{g}_{ij} = \lambda(1 - \varepsilon a) B_{ij}$　となる。

もし、式(1.2)のような S^i が、各パラ時刻で、うまく与えられて、
連続的な単相座標変換ができた場合、一点での推移 $\lambda \to \bar{\lambda}$ を見ると、
$\bar{\lambda} = (1 - \varepsilon a)\lambda$
より、

$$\bar{\lambda} - \lambda = -\varepsilon\lambda a \quad \to \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\lambda a \quad \to \quad \frac{d \log \lambda}{dt} = -a \quad \cdots(1.3)$$

となる。

§2 連続単相座標変換を作る

ここで、${}^{g}\Gamma^{i}_{jk}$ は、g_{ij} を計量とするクリストッフェル記号とする。

$$ {}^{g}\nabla_{n} g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{n}} - g_{ik}\,{}^{g}\Gamma^{k}_{nj} - g_{jk}\,{}^{g}\Gamma^{k}_{ni} $$

は、${}^{g}\nabla_{n} g_{ij}$ の定義であるが、よく知られているように、

$$ {}^{g}\nabla_{n} g_{ij} = 0 $$

である。（簡単な計算で確かめることもできる。）
これより、

$$ g_{ik}\,{}^{g}\Gamma^{k}_{nj} + g_{jk}\,{}^{g}\Gamma^{k}_{ni} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{n}} \cdots (2.1) $$

を得る。
これを使って、これから、具体的な連続単相座標変換を作ってみる。
（それが、単相定理の証明になる。）

さあ、始めよう。
まず、パラ時刻tによって変化しない、固定した点 P を定め、
点 P の座標を(p^{i})とする。

パラ時刻t、点 P での${}^{g}\Gamma^{i}_{jk}$ を${}^{g}\Gamma^{i}_{jk}(P,t)$と書く。

（以降でわかるが、座標(p^{i})は、tによって変化しない。）

最初の$t=0$では、空間は単相空間$g_{ij}=\lambda B_{ij}$である。

今、パラ時刻0 〜 tまでは、単相になったと仮定する。
そして、$t+\Delta t$でも、単相になるように、次のようなことを行う。
（これは、数学的帰納法に似ている。）

tにおける点(x^{i})でのs_{i}（§1)を、・・・(x^{i})はパラ時刻tでの座標

$$ s_{i} = \lambda(P,t) B_{ik}\,{}^{g}\Gamma^{k}_{mn}(P,t)(x^{m}-p^{m})(x^{n}-p^{n}) $$

で定義すると、
（この定義から、点 P では$s_{i}=0$。すなわち、点 P の座標は変化しない。）

$$\frac{ds_i}{dx^j} = 2\lambda(P,t) B_{ik}\, {}^g\Gamma^k_{jn}(P,t)(x^n - p^n)$$

$$\frac{\partial s_j}{\partial x^i} + \frac{\partial s_i}{\partial x^j} = 2\lambda(P,t)\left\{B_{ik}\, {}^g\Gamma^k_{jn}(P,t) + B_{jk}\, {}^g\Gamma^k_{in}(P,t)\right\}(x^n - p^n)$$

となるが、

式(2.1)　$g_{ik}\, {}^g\Gamma^k_{nj} + g_{jk}\, {}^g\Gamma^k_{ni} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^n}$

を使えば、

$$\frac{\partial s_j}{\partial x^i} + \frac{\partial s_i}{\partial x^j} = 2\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^n}\right)_{P,t} B_{ij}(x^n - p^n)$$

これは、$t+\Delta t$ でも、単相になる条件＝式(1.2)を満たしており、

その a は、

$$a = 2\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^n}\right)_{P,t}(x^n - p^n)$$

である。

このようなやり方で、$t=0$ から始めて、t→+∞ として行けば、

単相を保存する連続的な座標変換ができる。

さて、次の段階であるが、

一点を固定して、その点での λB_{ij} の λ の推移を見ると、

式(1.3)　$\dfrac{d\log\lambda}{dt} = -a$　より、

$$\frac{d\log\lambda}{dt} = -2\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^n}\right)_{P,t}(x^n - p^n) \quad \cdots(2.2)$$

この両辺を $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \log\lambda}{\partial x^i}\right) = -2\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^i}\right)_{P,t}$$

$$= -2\lambda\left(\frac{\partial \log\lambda}{\partial x^i}\right)_{P,t} = -4\lambda\left(\frac{\partial \log\sqrt{\lambda}}{\partial x^i}\right)_{P,t}$$

結局、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \log\sqrt{\lambda}}{\partial x^i}\right) = -2\lambda\left(\frac{\partial \log\sqrt{\lambda}}{\partial x^i}\right)_{P,t} \quad \cdots(2.3)$$

となる。

ここからは、点 P での挙動に注目する。
式(2.2)を見ると、点 P においては、$x^n - p^n = 0$ だから、
点 P では、$\frac{d\log\lambda}{dt} = 0$ 。
すなわち、点 P では、λ は、t によって変化しない。
さて、式(2.3)を点 P で考えると、略記して、

$$\frac{d}{dt}\partial_i \log\sqrt{\lambda} = -2\lambda\left(\partial_i \log\sqrt{\lambda}\right)_{P,t}$$

さて、ここから、

$$H = \partial_i \log\sqrt{\lambda}$$

とおいて、t →+∞としたときの、H の挙動を見る。上記の式は、

$$\frac{dH}{dt} = -2\lambda H$$

となり、

$$\frac{dH^2}{dt} = 2H\frac{dH}{dt} = -4\lambda H^2$$

これは、H^2 が 0 でなければ、

$$\frac{d\log H^2}{dt} = -4\lambda(P)$$

とできる。
・・・途中で、$H^2 = 0$ となる場合には、それ以降もずっと、$H^2 = 0$ となる。

いよいよ終盤である。
ここで、$\lambda(P)$ は、t に関して正の定数だから、定数 C によって、

$$\log H^2 = -4\lambda(P)t + C$$

と書ける。これから、

$$H^2 = \exp\{-4\lambda(P)t + C\}$$

これから、t →+∞ とすれば、H^2 →0 となる。

すなわち、点 P においては、 $\partial_i \log\sqrt{\lambda}$ →0

（証明終り）

2016 年 12 月　Ver1.0　発行
著者:渡辺　満 , 発行者:渡辺　満