時空理論／単相の世界

渡辺 満（静岡県）

§０ はじめに

（これ以降、添え字 i,j,k,l,m,n…は、1,2,3,4 の値をとる。）
時空理論本体4章で、‘単相時空’を定義した。
それを、ここで繰り返すと、

時空(x^i, G_{ij}, A_i)のG_{ij}が、ある座標変換によって、あらゆる場所で、

λB_{ij}の形になるとき（$G_{ij} \to \lambda B_{ij}$）、この時空を単相時空と呼ぶ。

それを改めて$(x^i, \lambda B_{ij}, A_i)$と書く。

ここで、B_{ij}は、$B_{11} = B_{22} = B_{33} = -1$、$B_{44} = 1$、他は 0。

さて、単相（型λB_{ij}）を保存する座標変換は、あるだろうか？

あるなら、どのようなものだろうか？
よく知られたものとして、ローレンツ変換（１次変換）があるが、
１次変換ではなく、もっと、起伏のある、奥の深い、実質的なものは、
ないだろうか？

次の定理を、証明することができる。（§1,§2 で証明）
●単相定理
単相時空では、任意の点Ｐで、次のような、別の単相座標が存在する。
（そのような単相座標を、別に作ることができる。）
その単相座標は、点Ｐで、点Ｐの各点慣性座標（従来の局所慣性座標）に、
なっている。
これ以降、この単相座標を、「基点をＰとする単相座標」、と呼ぶ、
＊
このような問題が扱われるのは、かって、なかっただろう。
僕自身も、まさか、このような定理が、自然にうまく導出できるとは、
思わなかった。
これによって、単相の世界の深さが、垣間見えた。
まだ、色々あるかも知れない、期待が持てる。

＊
この定理の存在から、
「時空は、一般相対論の言うような、グネグネしたゴムのようなものではなくて、
平坦で直線的な単相時空だろう。」
そういう思いを、ますます強くする。

● 参考

§2 に現れる ${}^{y}\Gamma^{i}_{jk}$ は、時空理論本体 3 章で、その具体的な形が決まるが、

それは、

$${}^{y}\Gamma^{i}_{jk} = {}^{G}\Gamma^{i}_{jk} - (\delta^{i}_{j}A_{k} + \delta^{i}_{k}A_{j} - G^{il}A_{l}G_{jk})$$

である。

ここで、${}^{G}\Gamma^{i}_{jk}$ は、G_{ij} を計量とするクリストッフェル記号である。

ここで特に、$A_{i} = 0$ の場合を考えれば、${}^{y}\Gamma^{i}_{jk} = {}^{G}\Gamma^{i}_{jk}$ となり、

時空理論の知識なしでも、計量だけを考えて、単相定理の証明を、
追うことができる。
（時空理論を習得するのが、面倒な人は、そうしてもよい。）

● 単相定理の意味するもの
単相定理によって、単相時空には、実質的な別の単相座標が、
色々と無数に存在することが、わかった。
単相時空が、物理的に意味のあるものだとすれば、
この別の単相座標というのは、どういう意味を持つのだろう？

ここでは、わかりやすさのために、$A_{i} = 0$ とする。

時空理論では、単相時空 $(x^{i}, \lambda B_{ij}, A_{i})$ における、

時空の重力ポテンシャル（正しくは時空ポテンシャルと呼んでいる）は、

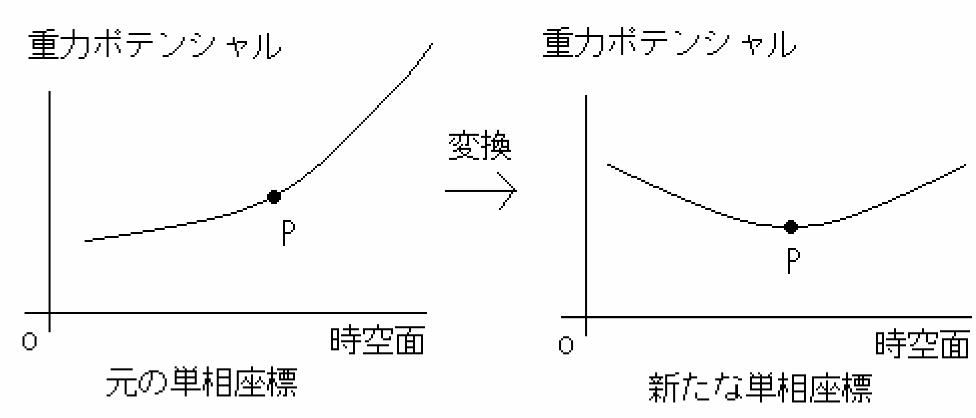
$\log\sqrt{\lambda}$ で与えられる。（時空理論本体 4 章）

この重力ポテンシャルは、単相座標の取り方によって、その分布が変化する。
（ローレンツ変換では、変化しない。）
注目すべきは、

単相定理で得られる、基点 P の単相座標では、 $\log\sqrt{\lambda}$ **の勾配が、**

基点 P で、ちょうど 0 になる、ということだ。・・・ $\partial_i \log\sqrt{\lambda} = 0$

（下図右のように、基点 P で平らになる。）



さて、「宇宙は広域で、単相時空である」、と仮定して、この定理を考えてみよう。

％　例えば、我々の太陽系で、太陽を中心にして、時空を見たい場合には、
太陽を基点 P とした単相座標を・・・。
また、地球を中心にして、時空を見たい場合には、
地球を基点 P とした単相座標を・・・。
さらに、我々の銀河の全体を見たい場合には、
我々の銀河の中心を基点 P とした単相座標を・・・。
取ればよい、等々。
このようにすれば、時空を、見たい領域に限定し、
その外側からの影響のほとんどを、排除することができるだろう。

§１ 連続的な座標変換

時空(x^i, G_{ij}, A_i)の点の座標(x^i)が、パラメータtに従って、

時々刻々と変化する、その様子を考える。
パラメータtは、実際の物理的時間ではないが、時間のように考えると、
思いやすいので、これ以降、'パラメータ時間' や 'パラメータ時刻' 、
などのように呼ぶ。（簡単に、'パラ時間' 、'パラ時刻' と表記する。）

時空のある点における、パラ時刻tにおける座標を(x^i)、
パラ時刻$t+\Delta t$における座標を$(\overline{x}^i)$とすれば、
$(x^i) \to (\overline{x}^i)$　は、この点の微小な座標変換である。

パラ時刻tで(G_{ij}, A_i)、パラ時刻$t+\Delta t$で$(\overline{G}_{ij}, \overline{A}_i)$とすれば、

$$\overline{G}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} G_{kl} \quad 、\quad \overline{A}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i} A_j$$

である。
パラ時刻tにおける、この微小な座標変換を、S^iによって、
$\overline{x}^i = x^i + \varepsilon S^i$　（$\varepsilon = \Delta t$）
のように書くと、

$x^i = \overline{x}^i - \varepsilon S^i$　より、$\dfrac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} = \delta^i_j - \varepsilon \dfrac{\partial S^i}{\partial \overline{x}^j}$

である。

$$\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} = \left(\delta^k_i - \varepsilon\frac{\partial S^k}{\partial \overline{x}^i}\right)\left(\delta^l_j - \varepsilon\frac{\partial S^l}{\partial \overline{x}^j}\right) = \delta^k_i\delta^l_j - \delta^k_i\varepsilon\frac{\partial S^l}{\partial \overline{x}^j} - \varepsilon\frac{\partial S^k}{\partial \overline{x}^i}\delta^l_j$$

ここで、εの２次以上の項を無視した。 これから、

$$\overline{G}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j} G_{kl} = G_{ij} - \varepsilon\frac{\partial S^l}{\partial \overline{x}^j} G_{il} - \varepsilon\frac{\partial S^k}{\partial \overline{x}^i} G_{kj}$$

となり、

$$\overline{G}_{ij} = G_{ij} - \varepsilon\left(\frac{\partial S^k}{\partial \overline{x}^j} G_{ik} + \frac{\partial S^k}{\partial \overline{x}^i} G_{jk}\right)$$

一方で、

$$\frac{\partial S^k}{\partial \overline{x}^i} = \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial S^k}{\partial x^l} = \left(\delta^l_i - \varepsilon\frac{\partial S^l}{\partial \overline{x}^i}\right)\frac{\partial S^k}{\partial x^l} = \frac{\partial S^k}{\partial x^i} - \varepsilon\frac{\partial S^l}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial S^k}{\partial x^l}$$

より、$\varepsilon = \Delta t$ の 2 次以上の項を無視すれば、

$$\overline{G_{ij}} = G_{ij} - \varepsilon\left(\frac{\partial S^k}{\partial x^j}G_{ik} + \frac{\partial S^k}{\partial x^i}G_{jk}\right) \quad \cdots(1.1)$$

が得られる。

●連続的な単相座標変換

さて、S^i が、どのようなものであれば、これが連続した単相座標変換になるのか？

それを考える。 パラ時刻 t で、$G_{ij} = \lambda B_{ij}$ のとき、

パラ時刻 $t+\Delta t$ でも、$\overline{G_{ij}} = \overline{\lambda} B_{ij}$ となるためには、$s_i = B_{ik}S^k$ とおくとき、

$$\frac{\partial s_j}{\partial x^i} + \frac{\partial s_i}{\partial x^j} = aB_{ij} \quad \cdots(1.2)$$

と書ければよい。 なぜならば、式(1.1)より、

$$\overline{G_{ij}} = \lambda B_{ij} - \varepsilon\lambda\left(\frac{\partial S^k}{\partial x^i}B_{jk} + \frac{\partial S^k}{\partial x^j}B_{ik}\right) = \lambda B_{ij} - \varepsilon\lambda\left(\frac{\partial s_j}{\partial x^i} + \frac{\partial s_i}{\partial x^j}\right)$$

$$= \lambda B_{ij} - \varepsilon\lambda a B_{ij} = \lambda(1-\varepsilon a)B_{ij}$$

すなわち、 $\overline{G_{ij}} = \lambda(1-\varepsilon a)B_{ij}$ となる。

もし、式(1.2)のような S^i が、うまく与えられて、
連続的な単相座標変換ができた場合、一点での推移 $\lambda \to \overline{\lambda}$ を見ると、
$\overline{\lambda} = (1-\varepsilon a)\lambda$
より、

$$\overline{\lambda} - \lambda = -\varepsilon\lambda a \quad \to \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\lambda a \quad \to \quad \frac{d\log\lambda}{dt} = -a \quad \cdots(1.3)$$

となる。

§2 連続単相座標変換を作る

時空(x^i, G_{ij}, A_i)において、時空理論の一般公式であるところの、

$${}^y\nabla_n G_{ij} = \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^n} - G_{ik}{}^y\Gamma^k_{nj} - G_{jk}{}^y\Gamma^k_{ni} \quad \cdots \text{(時空理論本体 1 章)}$$

$${}^y\nabla_n G_{ij} = 2A_n G_{ij} \quad \cdots \text{(時空理論本体 3 章)}$$

より、式

$$G_{ik}{}^y\Gamma^k_{nj} + G_{jk}{}^y\Gamma^k_{ni} = \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^n} - 2A_n G_{ij} \cdots (2.1)$$

が、一般的に成り立つ。
これを使って、これから、具体的な連続単相座標変換を作ってみる。
（それが、単相定理の証明になる。）

さあ、始めよう。
まず、パラ時刻tによって変化しない、固定した点 P を定め、
その座標を(p^i)とする。

パラ時刻t、点 P での${}^y\Gamma^i_{jk}$を${}^y\Gamma^i_{jk}(P,t)$と書く。

（以降でわかるが、座標(p^i)は、tによって変化しない。）

最初の$t=0$では、時空は単相時空$(x^i, G_{ij} = \lambda B_{ij}, A_i)$である。

今、パラ時刻0 ～ tまでは、単相になったと仮定する。
そして、$t+\Delta t$でも、単相になるように、次のようなことを行う。
（これは、数学的帰納法に似ている。）

tにおける点(x^i)でのs_i（§1)を、・・・(x^i)はパラ時刻tでの座標

$$s_i = \lambda(P,t) B_{ik}{}^y\Gamma^k_{mn}(P,t)(x^m - p^m)(x^n - p^n)$$

で定義すると、
（この定義から、点 P では$s_i = 0$。すなわち、点 P の座標は変化しない。）

$$\frac{ds_i}{dx^j} = 2\lambda(P,t) B_{ik}{}^y\Gamma^k_{jn}(P,t)(x^n - p^n)$$

$$\frac{\partial s_j}{\partial x^i} + \frac{\partial s_i}{\partial x^j} = 2\lambda(P,t)\left\{B_{ik}{}^y\Gamma^k_{jn}(P,t) + B_{jk}{}^y\Gamma^k_{in}(P,t)\right\}(x^n - p^n)$$

となるが、

式(2.1)　$G_{ik}{}^{y}\Gamma^{k}_{nj}+G_{jk}{}^{y}\Gamma^{k}_{ni}=\dfrac{\partial G_{ij}}{\partial x^{n}}-2A_{n}G_{ij}$

を使えば、

$$\frac{\partial s_j}{\partial x^i}+\frac{\partial s_i}{\partial x^j}=2\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^n}-2A_n\lambda\right)_{P,t}B_{ij}(x^n-p^n)$$

これは、$t+\Delta t$ でも、単相になる条件＝式(1.2)を満たしており、
その a は、

$$a=2\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^n}-2A_n\lambda\right)_{P,t}(x^n-p^n)$$

である。

このようなやり方で、$t=0$ から始めて、t→+∞ とすれば、
単相を保存する連続的な座標変換ができる。

さて、次の段階であるが、

一点を固定して、その点での λB_{ij} の λ の推移を見ると、

式(1.3)　$\dfrac{d\log\lambda}{dt}=-a$　より、

$$\frac{d\log\lambda}{dt}=-2\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^n}-2A_n\lambda\right)_{P,t}(x^n-p^n)\quad\cdots(2.2)$$

この両辺を $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\log\lambda}{\partial x^i}\right)=-2\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}-2A_i\lambda\right)_{P,t}$$

$$=-2\lambda\left(\frac{\partial\log\lambda}{\partial x^i}-2A_i\right)_{P,t}=-4\lambda\left(\frac{\partial\log\sqrt{\lambda}}{\partial x^i}-A_i\right)_{P,t}$$

結局、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\log\sqrt{\lambda}}{\partial x^i}\right)=-2\lambda\left(\frac{\partial\log\sqrt{\lambda}}{\partial x^i}-A_i\right)_{P,t}\quad\cdots(2.3)$$

となる。
ここからは、点 P での挙動に注目する。
式(2.2)を見ると、点 P においては、$x^n - p^n = 0$　だから、

点 P では、$\dfrac{d\log\lambda}{dt} = 0$　。

すなわち、点 P では、λ は、t によって変化しない。
点 P における A_i についても、次に見るように、t によって変化しない。
§1 の式

$$\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} = \delta^i_j - \varepsilon \frac{\partial S^i}{\partial \overline{x}^j}$$

より、

$$\overline{A}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j} A_i = \left(\delta^i_j - \varepsilon \frac{\partial S^i}{\partial \overline{x}^j} \right) A_i = A_j - \varepsilon \frac{\partial S^i}{\partial \overline{x}^j} A_i = A_j - \varepsilon \frac{\partial S^i}{\partial x^j} A_i$$

この $\dfrac{\partial S^i}{\partial x^j}$ には、$x^n - p^n$ の項が含まれているから、点 P においては、

$\overline{A}_j = A_j$ である。

さて、式(2.3)を点 P で考えると、略記して、

$$\frac{d}{dt} \partial_i \log\sqrt{\lambda} = -2\lambda \left(\partial_i \log\sqrt{\lambda} - A_i \right)_{P,t}$$

この左辺に、点 P での　$-\dfrac{d}{dt} A_i = 0$ を加えれば、

$$\frac{d}{dt} \left(\partial_i \log\sqrt{\lambda} - A_i \right) = -2\lambda \left(\partial_i \log\sqrt{\lambda} - A_i \right)$$

さて、ここから、

$$H = \partial_i \log\sqrt{\lambda} - A_i$$

とおいて、$t \to +\infty$ としたときの、H の挙動を見る。上記の式は、

$$\frac{dH}{dt} = -2\lambda H$$

となり、

$$\frac{dH^2}{dt} = 2H \frac{dH}{dt} = -4\lambda H^2$$

これは、H^2 が 0 でなければ、

$$\frac{d\log H^2}{dt} = -4\lambda(P)$$

とできる。

・・・途中で、$H^2 = 0$となる場合には、それ以降もずっと、$H^2 = 0$となる。

いよいよ終盤である。

ここで、$\lambda(P)$は、tに関して正の定数だから、定数Cによって、

$$\log H^2 = -4\lambda(P)t + C$$

と書ける。これから、

$$H^2 = \exp\{-4\lambda(P)t + C\}$$

これから、$t \to +\infty$ とすれば、$H^2 \to 0$ となる。

すなわち、点 P においては、 $\partial_i \log\sqrt{\lambda} - A_i \to 0$

これは、${}^{y}\Gamma_{ij}(P,t) \to 0$ を意味する。

（証明終り）

2016 年 11 月 Ver1.0 発行
著者：渡辺 満 ，発行者：渡辺 満